Оптимизацийн бодлого, дасгалын хураамж

Р.Энхбат Д.Нямсүрэн М.Мэнд-Амар

Улаанбаатар хот
2005 он

1 бүлэг. Оптимизацийн сонгодог бодлогын тавил

1.1 Үндсэн ойлголтууд

Функцийн өгөгдсөн олонлог дээрх хамгийн их эсвэл хамгийн бага утгаа авдаг цэгийг олох бодлогыг оптимизацийн бодлого гэнэ. $f(x)$ функцийг X олонлог дээр минимумчлах бодлогыг

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \tag{1.1}$$

гэж бичдэг. Энд f-ийг зорилгын функц, X-ийг боломжит шийдийн олонлог, $\forall x \in X$-ийг (1.1) бодлогын боломжит шийд гэнэ. Энэхүү номын турш бид төгсгөлөг хэмжээст бодлогууд үзэх бөгөөд өөрөөр хэлбэл бодлогын боломжит шийдийн олонлог нь Евклид огторгуй R^n дээр оршино. Хэрэв $x^* \in X \subset R^n$ цэгийн хувьд

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in X \tag{1.2}$$

нөхцөл биелж байвал түүнийг $f(x)$ функцийн X олонлог дээрх глобаль минимумын цэг эсвэл (1.1) бодлогын глобаль шийд гэнэ. Хэрэв $x^* \in X \subset R^n$ цэгийн хувьд

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in X \cap O_\varepsilon(x^*) \tag{1.3}$$

нөхцөл биелж байхаар ε тоо олдож байвал түүнийг $f(x)$ функцийн X олонлог дээрх локаль минимумын цэг эсвэл (1.1) бодлогын локаль шийд гэнэ. Энд $O_\varepsilon(x^*) = \{x \in R^n | \ ||x - x^*|| \leq \varepsilon\}$ нь x^* дээр төвтэй ε радиустай бөмбөлөг юм. Хэрэв (1.2), (1.3) нөхцлүүд нь $x \neq x^*$ хувьд эрс биелж байвал x^*-г харгалзан эрс глобаль, эрс локаль минимумын цэг гэж ярьдаг. $f(x)$ функцийг X олонлог дээр максимумчлах бодлого нь

$$f(x) \to \max, \ x \in X \tag{1.4}$$

гэсэн хэлбэртэй бичигдэнэ. Өмнөхтэй адилаар энэхүү бодлогын хувьд локаль, глобаль шийдийг тодорхойлж болно. (1.4) бодлого нь

$$-f(x) \to \min, \ x \in X$$

бодлоготой эквивалент бөгөөд иймд эдгээр бодлогуудын глобаль, локаль, эрс глобаль, эрс локаль шийдийн олонлогууд нь давхцана. Энэ нь бидэнд хүндрэлгүйгээр минимумчлах бодлогын хувьд яригдсан өгүүлбэрүүдийг максимумчлах бодлогын хувьд хөрвүүлэн ярих боломжийг олгоно. $f(x)$-ийн X олонлог дээрх максимум, минимумын цэгүүдийг нэгтгээд ерөнхий нэрээр экстремумын цэгүүд гэж ярьдаг. Түүнчлэн (1.1), (1.4) бодлогуудыг экстремаль бодлогууд гэнэ.

1.2 Глобаль шийд оршин байх нь

f функцийн X олонлог дээрх доод торгон зааг өөрөөр хэлбэл $f^* = \inf_{x\in X} f(x) = \inf_X f(x)$ хэмжигдэхүүнийг (1.1) бодлогын утга гэнэ. Энд гурван тохиолдол байж болно:

1. $f^* > -\infty$ ба ямар нэгэн $x^* \in X$ ийн хувьд $f(x^*) = f^*$ өөрөөр хэлбэл бодлогын утга зааглагдсан бөгөөд энэхүү утганд хүргэдэг цэг оршин байдаг.
2. $f^* > -\infty$ ба $f(x) > f^*$, $\forall x \in X$ өөрөөр хэлбэл бодлогын утга зааглагдсан боловч энэхүү утганд хүргэдэг цэг оршин байдаггүй.
3. $f^* = -\infty$ өөрөөр хэлбэл бодлогын утга зааглагдаагүй.

Эхний тохиолдолд (1.1) бодлого глобаль шийдтэй, харин (2) болон (3) тохиолдолд бодлого шийдгүй.

Теорем 1.1(Вейрштрасс) X олонлог нь R^n дээрх компакт(битүү зааглагдсан олонлог), f нь X олонлог дээр тасралтгүй функц байг. Тэгвэл (1.1) бодлогын глобаль шийд нь оршин байна.

$X \subset R^n$ олонлог дээр тодорхойлогдсон f функцийн хувьд эсвэл $\lim_{k\to\infty} x^k = x \in \bar{X}\backslash X$ эсвэл $\lim_{k\to\infty} ||x^k|| = \infty$ байх $\forall\{x^k\} \subset X$ дарааллын хувьд $\bar{\lim_{k\to\infty}} f(x^k) = \infty(\lim_{k\to\infty} f(x^k) = -\infty)$ нөхцөл биелж байвал түүнийг X олонлог дээр төгсгөлгүй өсдөг(буурдаг) дараалал гэнэ.

Теорем 1.2 X нь R^n дээрх дурын олонлог, f нь X дээр төгсгөлгүй өсдөг тасралтгүй функц байг. Тэгвэл (1.1) бодлогын глобаль шийд нь оршин байна.

1.3 Квадратлаг функц

$$f(x) =< Ax, x > + < b, x > +c = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{j=1}^{n} b_jx_j + c, \tag{1.5}$$

гэсэн хэлбэрийн функцийг квадратлаг функц гэнэ. Энд $A = (a_{ij})$ нь $n \times n$ хэмжээст симметр матриц, $b = (b_j) \in R^n$, $c \in R$.

Теорем 1.3 (1.5) квадратлаг функц нь эсвэл R^n дээр доороосоо зааглагдаагүй байна эсвэл R^n дээр глобаль минимумын цэгтэй байна. Хэрэв хоёр дахь нөхцөл нь биелэгдэж байвал A матриц нь сөрөг биш тодорхойлогдсон матриц ө.х. $< Ax, x >\geq 0,\ \forall x \in R^n$ байна.

Теорем 1.4 Хэрэв A матриц нь эерэг тодорхойлогдсон ө.х. $< Ax, x >> 0,\ \forall x \in R^n, x \neq 0$ байвал квадратлаг функц (1.5) нь R^n дээр төгсгөлгүй өсдөг бөгөөд $\forall X \in R^n$ дээр глобаль минимумын цэгтэй байна.

Теорем 1.5(Сильвестрийн шинжүүр) A матриц нь $n \times n$ хэмжээст симметр матриц байг. Тэгвэл

1. A матриц сөрөг биш тодорхойлогдсон байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний бүх гол минорууд нь сөрөг биш байх явдал юм.
2. A матриц эерэг тодорхойлогдсон байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний бүх гол минорууд нь эерэг байх явдал юм.

$x^0 \in R^n$ цэгийн $X \subset R^n$ олонлог дээрх проекц гэж X олонлогийн цэгүүд дотроос x^0 цэгт хамгийн ойрхон орших цэгийг хэлнэ. Өөрөөр хэлбэл проекц нь $f(x) = ||x-x^0||^2 \to \min,\ x \in X$ бодлогын глобаль шийд байна. Энд f нь $f(x) =< x - x^0, x - x^0 >=< x, x > -2 < x^0, x > + < x^0, x^0 >$ гэсэн нэгж матриц бүхий квадратлаг функц юм.

Теорем 1.6 $\forall x^0 \in R^n$ цэгийн битүү олонлог $X \subset R^n$ дээрх проекц нь оршин байна.

1.4 Оптимизацийн бодлогын геометр тайлбар.

Геометр байгуулалт нь оптимизацийн онолд чухал байрыг эзэлдэг. Эдгээр нь нэг талаас өгөгдсөн теоремын геометр дүрслэлийг харах бололцоог олгох төдийгүй нөгөө талаар хялбар оптимизацийн бодлогуудын шийдийг хайхад ашиг тустай байдаг. $X \subset R^2$ бүхий (1.1) бодлогын геометр дүрслэлийг харахын тулд хавтгай дээр X олонлог болон f функцын хэд хэдэн түвшний шугам гэж нэрлэгдэх $L_\alpha(f) = x \in R^2 | f(x) = \alpha,\ \alpha \in R$ олонлогуудыг зайлшгүй байгуулах шаардпагатай болдог. f функцын өөрчлөлтийн төлөв байдлыг харахын тулд өгөгдсөн түвшний шугамын α -аас их утга авч буй талд нь $+$ тэмдэг нөгөө талд нь $-$ тэмдэг тавих нь ашигтай байдаг. Бодлогын глобаль шийдийг олох бодлого нь түвшний шугам $L_\alpha(f)$ нь X олонлогтой хоосон бишээр огтлолцдог тийм α -уудаас хамгийн бага α^*ыг олох бодлого руу шилжинэ. Энэ үед $\forall x^* \in L_{\alpha^*}(f)X$ нь бодлогын глобаль шийд байх бөгөөд $\alpha^* = f^* = f(x^*)$ түүний утга байна. x^* шийд нь X олонлогийн дотор ч оршиж болно, гадна ч оршиж болно.

Дасгал

1.1.

$f(x) = (k-a)x + e^{(k-b)(k-c)x}$ функц R тэнхлэг дээр глобаль минимумын цэгтэй байх k параметрийн бүх утгыг ол. Мөн $f^* = \inf\limits_{R} f(x)$ утга төгслөг боловч энэ утганд хүргэдэг цэг R ээс олддоггүй байх k параметрийн бүх утгыг ол.

Хүснэгт 1.1.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	4	2	7	6	7	5	9	11	8	6	9	16	8	5	7
2	1	3	5	7	3	5	6	12	4	7	8	17	6	8	9
3	9	1	3	8	8	2	7	13	3	1	9	18	7	5	8
4	5	3	8	9	5	2	6	14	9	4	7	19	9	6	7
5	2	3	4	10	7	3	5	15	5	6	7	20	6	2	5

1.2.

$f(x,y) = kx^2 + 2axy + b^2y^2 + cx + my$ квадратлаг функц R^2 дээр глобаль минимумын цэгтэй байх $k,\ m$ параметрүүдийн бүх утгуудыг ол.

Хүснэгт 1.2.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	3	6	6	1	4	-2	11	5	2	15	16	4	3	16
2	1	8	-1	7	3	2	9	12	1	4	-3	17	5	6	-10
3	3	4	6	8	5	3	5	13	4	5	-4	18	3	4	-15
4	4	5	-8	9	2	5	-4	14	2	3	8	19	1	3	4
5	5	2	10	10	4	3	-12	15	3	7	6	20	2	5	-2

1.3.

Доорх $f(x,y)$ функцуудын R^2 хавтгай дээрх $L_\alpha = \{(x,y)|f(x,y) = \alpha\}$ түвшний шугамуудыг $\alpha = 0, 1, 2$ үед тус тус дүрсэл. а. $ax + by$ б. $ax^2 + by^2$ в. $ax^2 - by^2$
г. $ax^2 + by$ д. $a|x| + b|y|$ е. $a|x| - b|y|$
ж. $ax^3 + by^3$ з. $axy - bx^3$:

Хүснэгт 1.3.

	a	b		a	b		a	b		a	b
1	2	3	6	4	5	11	3	6	16	1	2
2	3	4	7	5	3	12	6	4	17	8	7
3	5	6	8	3	1	13	7	5	18	5	2
4	7	3	9	4	2	14	1	4	19	6	9
5	9	10	10	8	6	15	8	9	20	5	8

1.4.

R^2 дээр координатын эхийн $X = \{(x,y)|\ ax + by \geq c\}$ хагас хавтгай дээрх проекцийг ол.

Хүснэгт 1.4.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	1	3	6	1	-5	4	11	1	-2	1	16	5	-2	5
2	1	-3	1	7	4	1	5	12	2	4	2	17	-3	5	3
3	3	2	4	8	-2	3	1	13	-3	1	5	18	-5	4	2
4	-5	1	3	9	-4	2	2	14	1	4	3	19	5	3	4
5	4	-5	2	10	2	5	3	15	4	3	4	20	-3	4	1

1.5.

$(a,b) \in R^2$ цэгийн $X = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \le c^2\}$ дугуй дээрх проекцийг ол.

Хүснэгт 1.5.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	5	3	6	-1	3	2	11	1	-4	3	16	-1	5	4
2	4	-1	4	7	6	-1	5	12	1	3	1	17	-2	5	2
3	5	1	5	8	-4	1	4	13	-5	4	5	18	-3	2	1
4	1	2	1	9	2	7	1	14	1	-2	2	19	7	-3	2
5	2	-3	2	10	5	2	3	15	3	-2	3	20	1	4	4

1.6.

$f(x,y) = x^2 + ay^2$ функцийн $X = \{(x,y)|\ |x| + b|y| \le c\}$ олонлог дээрх глобаль максимумын цэгийг ол.

Хүснэгт 1.6.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	2	4	6	5	3	2	11	2	1	3	16	6	2	9
2	1	2	3	7	10	3	4	12	1/2	1	2	17	1	2	4
3	5	2	2	8	1	4	1	13	4/5	1	1	18	5	2	5
4	2	3	4	9	3	4	2	14	12	3	6	19	20	5	10
5	1	3	3	10	20	4	3	15	8	3	4	20	30	5	20

1.7.

$f(x,y) = ax^2 - by^2$ функцийн $X = \{(x,y)|\ |x+1| + |y-c| \le 1\}$ олонлог дээрх глобаль экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 1.7.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	5	2	3/4	6	5	3	1/3	11	6	1	5/2	16	7	3	2/3
2	3	1	1	7	2	1	1/2	12	7	1	3	17	3	2	1/4
3	10	3	7/6	8	7	5	1/5	13	13	5	4/5	18	5	4	1/8
4	5	1	2	9	8	3	5/6	14	9	2	7/4	19	7	2	5/4
5	4	1	3/2	10	11	3	4/3	15	9	7	1/7	20	8	1	7/2

1.8.

$f(x,y) = ax - y$ функц $X = \{(x,y)|\ -x \le y \le kx + b|x| + c\}$ олонлог дээр глобаль минимумын цэгтэй байх k параметрийн бүх утгууд тодорхойлж, эдгээр цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 1.8.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	6	3	5	6	4	2	2	11	8	2	4	16	6	1	3
2	7	2	2	7	7	3	3	12	10	4	1	17	9	2	1
3	8	4	3	8	9	4	5	13	4	1	5	18	5	1	2
4	3	1	1	9	10	3	4	14	6	2	3	19	9	3	5
5	5	2	4	10	2	1	1	15	8	3	2	20	10	2	4

Бодлого

1.1.

X дурын олонлог, f нь X олонлог дээрх дурын тоон функц, φ нь $U \subset R$ дээр өсдөг функц бөгөөд $f(x) \in U,\ \forall x \in X^*$ байг. Тэгвэл (1.1) бодлого нь

$$\varphi(f(x)) \to \min,\ x \in X$$

бодлоготой эквивалент болохыг батал. Өөрөөр хэлбэл эдгээр бодлогуудын эрс болон эрс биш глобаль эсвэл локаль минимумын цэгүүдийн олонлогууд нь харгалзан давхцдаг бөгөөд $\inf\limits_X \varphi(f(x)) = \varphi(\inf\limits_X f(x))$ болохыг батал.

1.2.

X нь дурын олонлог байг. X олонлог дээр тодорхойлогдсон дурын f функцийн хувьд $f^* = \inf\limits_X f(x)$ гэе. Тэгвэл дараах тэнцэтгэл болон тэнцэтгэл бишүүдийг батал.
а. $(\alpha f + \beta)^* = \alpha f^* + \beta,\ \forall \alpha,\ \beta \in R,\ \alpha > 0$
б. $(f+g)^* \geq f^* + g^*$
в. хэрэв $f^* \geq 0,\ g^* \geq 0$ бол $(f \cdot g)^* \geq f^* \cdot g^*$
г. $(\min\{f,\ g\})^* = \min\{f^*,\ g^*\}$
д. $(\max\{f,\ g\})^* \geq \max\{f^*,\ g^*\}$
е. хэрэв $f^* > -\infty,\ g^* > -\infty$ бол $f(x)g(x) + f^* \cdot g^* \geq f(x)g^* + g(x)f^*,\ \forall x \in X$.

1.3.

$f(x,y)$ функц нь $X \times Y$ декартын үржвэр дээр тодорхойлогдсон байг.
а. $\inf\limits_{X \times Y} f(x,y) = \inf\limits_X \inf\limits_Y f(x,y) = \inf\limits_Y \inf\limits_X f(x,y)$
б. $\sup\limits_X \inf\limits_Y f(x,y) \leq \inf\limits_Y \sup\limits_X f(x,y)$.
болохыг тус тус батал.

1.4.

$X \subset R^n$ олонлог дээр тодорхойлогдсон f функцийн хувьд $\{k^k\} \subset X,\ \lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$ нөхцлөөс $f(x) \leq \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k),\ (f(x)) \geq \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)$ нөхцөл мөрдөж байвал түүнийг x цэг дээр доороосоо(дээрээсээ) хагас тасралтгүй гэж ярьдаг.
$f(x) = \begin{cases} 1, & \texttt{хэрэв}\ x > 0 \\ -1, & \texttt{хэрэв}\ x < 0 \end{cases}$ функц доороосоо(дээрээсээ) хагас тасралтгүй болж байхаар 0 цэг дээр тодорхойл.

1.5.

f функц x цэг дээр тасралтгүй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь тэрээр энэ цэг дээр дээрээсээ болон доороосоо хагас тасралтгүй байх явдал болохыг батал.

1.6.

f функц доороосоо хагас тасралтгүй байх кзайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $-f$ функц нь дээрээсээ хагас тасралтгүй байх явдал болохыг батал.

1.7.

Хоёр доороосоо хагас тасралтгүй функцуудыг нэмэхэд, доороосоо хагас тасралтгүй функцийг сөрөг биш тоогоор үржихэд доороосоо хагас тасралтгүй функц гарна гэдгийг тус тус батал.

1.8.

$X \subset R^n$ болон $Y \subset R^n$ дурын олонлогууд, $\varphi(x, y)$ функц нь $X \times Y$ дээр тодорхойлогдсон бөгөөд бэхлэгдсэн $\forall y \in Y$ бүрийн хувьд X дээр доороосоо хагас тасралтгүй, бэхлэгдсэн $\forall x \in X$ бүрийн хувьд Y дээр дээрээсээ зааглагдсан байг. Тэгвэл $f(x) = \sup\limits_{Y} \varphi(x, y)$ функц нь X дээр доороосоо хагас тасралтгүй гэж батал.

1.9.

Дараах Веирштрассын өргөтгөсөн теоремыг батал. X нь R^n дээрх компакт, f нь X дээр доороосоо хагас тасралтгүй функц байг. Тэгвэл f ын X дээрх глобаль минимумын цэг нь оршин байна.

1.10.

X нь R^n дээрх дурын олонлог, Y нь R^m дээрх компакт, $\varphi(x, y)$ нь $X \times Y$ дээр тасралтгүй(доороосоо хагас тасралтгүй) функц байг. $f(x) = \min\limits_{Y} \varphi(x, y)$ функц нь X дээр тасралтгүй (доороосоо хагас тасралтгүй) байна гэж батал.

1.11.

X нь R^n дээрх дурын олонлог, Y нь R^m дээрх компакт, $\varphi(x, y)$ нь $X \times Y$ дээр тасралтгүй функц байг. Бэхлэгдсэн $\forall x \in X$ хувьд $\varphi(x, y)$ функц нь Y дээр глобаль минимумдаа цорын ганц $y(x)$ цэг дээр хүрдэг гэж үзье. $y(x)$ функц нь X дээр тасралтгүй гэж батал.

1.12.

Тоон дараалал $\{a_k\}$ нь үл буурах, ө.х. $\forall k$ хувьд $a_k \le a_{k+1}$ байг. $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = \sup\limits_{k} a_k$ болохыг батал.

1.13.

X нь R^n дээрх дурын олонлог, f_k $(k = 1, 2, \dots)$ үүд нь X дээр $\forall x \in X$-ийн хувьд $f_k(x)$ дараалал нь үл буурах гэсэн нөхцлийг хангадаг функцууд байг. Тэгвэл
а. $\lim\limits_{k \to \infty} \sup\limits_{X} f_k(x) = \sup\limits_{X} \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$
б. хэрэв $f_k(k = 1, 2, \dots)$ функцууд нь X дээр доороосоо хагас тасралтгүй бөгөөд $\forall x \in X$ хувьд $\{f_k(x)\}$ дараалал нь дээрээсээ зааглагдсан бол $f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$ функц нь X дээр доороосоо хагас тасралтгүй гэдгийг тус тус батал.

1.14.

X нь R^n дээрх компакт, $f_k(k=1,2,\dots)$ үүд нь $\forall x\in X$ хувьд $\{f_k(x)\}$ дараалал нь үл буурах, дээрээсээ зааглагдсан нөхцлийг хангах X дээр доороосоо хагас тасралтгүй функцууд байг. Түүнчлэн x^k нь $f_k(x)$ функцийн X дээрх глобаль минимумын цэг, $\bar{x}$ нь $\{x^k\}$ дарааллын дурын хязгаарын цэг байг.
а. $\lim\limits_{k\to\infty}\min\limits_X f_k(x)=\min\limits_X\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$;
б. $\bar{x}$ нь $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ функцийн X олонлог дээрх глобаль минимумын цэг
болохыг тус тус батал.

1.15.

$X_\beta=\{x\in X|\ f(x)\le\beta\},\ \beta\in R$ олонлогийг f функцийн $X\subset R^n$ олонлог дээрх Лебегийн олонлог гэнэ. Дараах өгүүлбэрүүдийг батал.
а. хэрэв X битүүбөгөөд f нь X дээр доороосоо хагас тасралтгүй бол бүх X_β олонлогууд нь битүү.
б. хэрэв бүх X_β олонлогууд нь битүү бол f нь X дээр доороосоо хагас тасралтгүй байна.

1.16.

Дараах Вейрштрассын өргөтгөсөн теоремыг батал.
X нь R^n дээрх битүү олонлог, f нь X дээр доороосоо хагас тасралтгүй функц бөгөөд түүний ямар нэгэн Лебегийн олонлог X_β нь хоосон биш, зааглагдсан байг. Тэгвэл f ын X дээрх глобаль минимумын цэг нь оршин байна.

1.17.

Төгсгөлгүй өсдөг функцийн бүх Лебегийн олонлогууд нь зааглагдсан байна гэдгийг батал.

1.18.

Теорем 1.2. ын дараах өргөтгөлийг батал.
X нь R^n дээрх дурын олонлог, f нь X дээр төгсгөлгүй өсдөг, доороосоо хагас тасралтгүй функц байг. Тэгвэл f функцийн X дээрх глобаль минимумын цэг оршин байна.

1.19.

Теорем 1.3. ыг батал.

1.20.

Теорем 1.4. ыг батал.

1.21.

X нь R^n дээрх зааглагдсан олонлог, f функц нь $\bar{X}$ гүйцээлт дээр тасралтгүй бөгөөд X дээр дифференциалчлагддаг байг. $\forall x\in\bar{X}\backslash X$ хувьд $h\in R^n$ гэсэн вектор орших бөгөөд хангалттай бага бүх $\alpha>0$ хувьд $x+\alpha h\in X$ бөгөөд $\overline{\lim\limits_{\alpha\to 0+}} < f'(x+\alpha h), h >< 0$ нөхцлүүдийг хангадаг байг. (f' нь тухайн уламжлалудаар зохиосон вектор). f функцийн X олонлог дээрх глобаль минимумын цэг оршин байна гэдгийг батал.

1.22.

$f_1(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)$ нь тоон аргументтэй функцууд бөгөөд $\alpha \geq 0$ үед тасралтгүй, $\alpha > 0$ үед тасралтгүй дифференциалчлагддаг бөгөөд $\lim\limits_{\alpha \to 0+} f_j'(\alpha) = -\infty,\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ байг. Тэгвэл $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ функцийн $X = \{x \in R^n |\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ олонлог дээрх глобаль минимум оршин байна гэдгийг батал.

1.23.

Тасралтгүй функц f нь R^n дээр глобаль минимумын цэгтэй байг. Эндээс f нь дурын битүү $X \subset R^n$ гэсэн олонлог дээр f глобаль минимумдаа хүрнэ гэж мөрдөж гарах уу?

1.24.

Тасралтгүй функцууд f болон g-үүд нь $X \subset R^n$ битүү олонлог дээр глобаль минимумын цэгүүдтэй байг. Эндээс $f + g$ нь X дээр мөн глобаль минимумдаа хүрнэ гэж мөрдөж гарах уу?

1.25.

$f(x) = (a+1)x + a \ln x - 2 \sin x$ функц эерэг тоонуудын олонлог дээр глобаль минимумын цэгтэй байх a параметрийн бүх утгуудыг ол.

1.26.

$f(x, y) = (a-2)(a-3)\exp^x + \frac{|y+10|}{y^2+1}$ функц $X = \{(x, y) | (a-4)x^2 + y^2 \leq 1\}$ олонлог дээр глобаль минимумын цэгтэй байх a параметрийн бүх утгуудыг ол. Түүнчлэн $f^* = \inf\limits_{X} f(x, y)$ утга төгслөг боловч энэ утганд хүргэх цэг олддоггүй байх a параметрийн бүх утгуудыг ол.

1.27.

$f(x, y) = x + ay$ функц $X = \{(x, y) | bx^2 - 2xy + y^2 \leq 1\}$ олонлог дээр глобаль минимумын цэгтэй байх a болон b параметрүүдийн бүх утгуудыг ол.

1.28.

$f(x, y) = 4x^2 + (a-4)xy^2$ функц $X = \{(x, y) | (a-1)x + y^2 \leq 1\}$ олонлог дээр глобаль минимумын цэгтэй байх a параметрийн бүх утгуудыг ол.

1.29.

$(1, 3, 8)$ цэгийн $X = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2,\ 4 \leq y \leq 5,\ 6 \leq z \leq 7\}$ параллелепипед дээрх проекцийг ол.

1.30.

(x_0, y_0) цэгийн $X = \{(x, y) | ax + by = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},\ a > 0,\ b > 0$ олонлог дээрх проекцийг ол.

1.31.

(x_0, y_0) цэгийн $X = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1,\ y \geq 0$ олонлог дээрх бүх проекцийг ол. Дараах бодлогуудын глобаль шийдүүдийг ол. (Өгөгдсөн тэгшитгэл, тэнцэтгэл бишүүд нь боломжит шийдийн мужийг дүрсэлнэ.)

1.32.

$f(x, y) = xy \to \max,\ ax + by = 1$, энд $a > 0,\ b > 0$.

1.33.

$f(x, y) = -\ln x + y \to \min,\ x - y \leq 2,\ x + y^2 \leq 4,\ x > 0$.

1.34.

$f(x, y) = 2x - y \to \max,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x - y \leq 0,\ x + y \leq 1$.

1.35.

$f(x, y) = x + \sqrt{y} \to \min,\ x + y \geq 1,\ x^2 + y^2 = 1$.

1.36.

$f(x, y) = \max\{|x - 2|,\ |y|\} \to \min,\ 2|x| - |y| \leq 2$.

1.37.

$f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 \to \min,\ x^2 + y^2 = 2axy$, энд $a \in R$.

1.38.

$f(x, y) = 4x^2 + y^2 \to \max(\min),\ |x - 3| + |y - a| \leq 1$, энд $a \geq 0$.

1.39.

$x^3 + y^3 \to \max,\ x^2 + 4y^2 \leq 4$ бодлогын локаль шийдийг ол.

1.40.

a параметрийн ямар утганд дараах бодлого глобаль шийдтэй, ямар утганд локаль шийдтэй байх вэ? $x + ay \to \max,\ x^3 + y^3 = 3xy$

1.41.

$2x + y \to \max,\ x^2 - y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq ax + 1$ бодлого глобаль шийдтэй байх a параметрийн бүх утгуудыг ол. Энэхүү бүлгийн сүүлчийн 3 бодлого нь максимумын аксиоматик тодорхойлолтын тухай Кукушкины теоремд зориулагдсан болно.

1.42.

X нь R^n дээрх компакт, $C(X)$ нь X дээрх бүх тасралтгүй функцуудын олонлог, F нь $C(X)$ дээр тодорхойлогдсон функциональ байг. F нь дараах хоёр аксиомыг хангана гэж үзье.
1) $F(\alpha f+\beta)=\alpha F(f)+\beta,\ \forall f\in C(X),\ \alpha,\beta\in R,\ \alpha>0;$
2) $F(\max\{f,g\})=\max\{F(f),F(g)\},\ \forall f,g\in C(X).$
Тэгвэл
а. $F(\beta)=\beta,\ \forall\beta\in R;$
б. F функциональ үл буурах, ө.х. хэрэв $f(x)\le g(x),\ \forall x\in X$ бол $F(f)\le F(g)$.
в. $\min\limits_X f(x)\le F(f)\le\max\limits_X f(x),\ \forall f\in C(X)$. болохыг тус тус батал.

1.43.

Өмнөх бодлогын хувьд F функционалийн хувьд дараах олонлогуудыг харгалзуулан оруулъя.
$E_f=\{x\in X|f(x)\le F(f)\},\ f\in C(X)$
$E=\bigcap\limits_{f\in C(X)} E_f.$
Тэгвэл
а. Дурын $Y\subset X,\ Y\cap E=\emptyset$ гэсэн битүү олонлогийн хувьд $\min\limits_Y f(x)>F(f)$ тэнцэтгэл бишийг хангах $f\in C(X)$ функц олдоно;
б. E хоосон биш, битүү олонлог;
в. $\max\limits_E f(x)\le F(f),\ \forall f\in C(X)$ болохыг тус тус батал.

2 бүлэг. Нөхцөлт биш оптимизацийн бодлого

2.1 Экстремумын нөхцөл

$$f(x)\to\min,\ x\in R^n. \tag{2.1}$$

гэсэн нөхцөлт биш экстремумын бодлого өгсөн байг. $f'(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$ нь f функцийн нэгдүгээр эрэмбийн тухайн уламжлалуудаас зохиосон вектор(градиент), $f''(x)=(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ f функцийн хоёрдугаар эрэмбийн тухайн уламжлалуудаас зохиосон матриц(гессиан).

Теорем 2.1(нэгдүгээр эрэмбийн зайлшгүй нөхцөл) f функц нь $x^*\in R^n$ цэг дээр дифференциалчлагддаг байг. Тэгвэл хэрэв x^* нь (2.1.) бодлогын локаль шийд бол

$$f'(x^*)=0 \tag{2.2}$$

байна. (2.2) нөхцлийг хангаж байгаа $x^*\in R^n$ цэгүүдийг (2.1) бодлого болон f функцын стационар цэгүүд гэнэ.

Теорем 2.2(хоёрдугаар эрэмбийн зайлшгүй нөхцөл) f функц нь $x^*\in R^n$ цэг дээр 2 удаа дифференциалчлагддаг байг. Тэгвэл хэрэв x^* нь (2.1.) бодлогын локаль шийд бол $f''(x^*)$ матриц нь сөрөг биш тодорхойлогдсон. Өөрөөр хэлбэл,

$$<f''(x^*)h,h>\ge 0,\ \forall h\in R^n. \tag{2.3}$$

байна.

Теорем 2.3(минимумын хоёрдугаар эрэмбийн хүрэлцээтэй нөхцөл) f функц нь $x^* \in R^n$ цэг дээр 2 удаа дифференциалчлагддаг байг. Тэгвэл хэрэв

$$f'(x^*) = 0$$

бөгөөд $f''(x^*)$ матриц эерэг тодорхойлогдсон. Өөрөөр хэлбэл,

$$< f''(x^*)h, h >> 0, \ \forall h \in R^n, h \neq 0. \tag{2.4}$$

бол x^* нь (2.1.) бодлогын эрс локаль шийд байна.

2.2 Дифференциалчлагддаг буулгалт.

$F = (F_i) : X \to R^m, \ X \subset R^n$ буулгалтын(вектор функц) хувьд $F'(x)$ гэдгээр F-ын $x \in X$ цэг дээрх тухайн уламжлалуудын

$$F'(x) = (\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x))_{i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n}$$

гэсэн матрицыг ойлгоно. Энд i нь мөрийн индекс, j нь баганын индекс. Энэхүү матрицыг F буулгалтын x цэг дээрх Якобийн матриц гэдэг. Хэрэв $F_i, \ i = 1, \dots, m$ функц бүр X дээр дифференциалчлагддаг (тасралтгүй дифференциалчлагддаг) бол $F = (F_i) : X \to R^m$ буулгалтыг дифференциалчлагддаг (тасралтгүй дифференциалчлагддаг) гэнэ. Ийнхүү F-ын тасралтгүй дифференциалчлагдалт нь $F'(x)$ матрицын оршин байх болон X дээр тасралтгүй байхтай тэнцүү чанартай байна. Харин $F : X \times Y \to R^k, \ X \subset R^n, \ Y \subset R^m$ буулгалтын хувьд $F'_x(x^*, y^*)$ оор түүний x координатаархи Якобийн матрицын $(x^*, y^*) \in X \times Y$ дээрх утга $F'_x(x^*, y^*) = (\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^*, y^*))_{i=1,\dots,k, \quad j=1,\dots,n}$ ыг ойлгоно. Дараах математик анализийн үндсэн теорем нь энэ болон дараагийн бүлгийн зарим бодлогуудыг бодоход хэрэглэгдэнэ.

Теорем 2.4(далд функцийн тухай) $X \subset R^n, \ Y \subset R^m$ үүд нь задгай олонлогууд, $F : X \times Y \to R^n$ нь тасралтгүй дифференциалчлагддаг буулгалт, $x^* \in X, \ y^* \in Y$ байг. $F(x^*, y^*) = 0$ бөгөөд $F'_x(x^*, y^*)$ матриц нь үл бөхөх гэж үзье. Тэгвэл x^* ын U болон y^* ын V гэсэн орчингууд дараах чанаруудыг хангаж байхаар олдоно:
$\forall y \in V$ ын хувьд $F(x(y), y) = 0$ нөхцлийг хангах $x(y) \in U$ цэг цорын ганц олдоно. Энэхүү $x(y^*) = x^*$ ын хувьд вектор функц $x(y)$ нь V дээр тасралтгүй дифференциалчлагдах бөгөөд

$$x'(y^*) = -[F'_x(x^*, y^*)]^{-1} F'_y(x^*, y^*).$$

Түүнчлэн давхар функцийн дифференциалчлах дүрмийг санавал: хэрэв $F : X \to Y$ ба $G : Y \to R^k$, $X \subset R^n, \ Y \subset R^m$ буулгалтууд нь дифференциалчлагддаг бол $H : X \to R^k$ гэсэн $H(x) = G(F(x))$, буулгалт дифференциалчлагдах бөгөөд $H'(x) = G'(y)F'(x), \ y = F(x)$ байна. Энд Якобийн матрицууд $H'(x), \ G'(y)$ болон $F'(x)$ үүд нь харгалзан $k \times n, \ k \times m, \ m \times n$ хэмжээсүүдтэй байна.

Дасгал

2.1.

$f(x, y) = ax^2 + 2xy + by^2 - 2x - 3y$ функцийн глобаль минимумыг R^2 хавтгай дээр ол.

Хүснэгт 2.1.

	a	b		a	b		a	b		a	b
1	1	2	6	2	1	11	3	1	16	4	1
2	1	3	7	2	2	12	3	2	17	4	2
3	1	4	8	2	3	13	3	3	18	4	3
4	1	5	9	2	4	14	3	4	19	4	4
5	1	6	10	2	5	15	3	5	20	4	5

2.2.

$f(x, y) = axy + \frac{b}{x} + \frac{c}{y} \to \min, \ x > 0, \ y > 0$ бодлогын глобаль шийд болон утгыг ол.

Хүснэгт 2.2.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	1	3	6	3	4	1	11	4	1	1	16	2	3	3
2	3	2	4	7	2	1	4	12	1	4	1	17	1	1	4
3	1	2	3	8	4	1	2	13	2	4	3	18	1	1	1
4	3	1	2	9	4	1	3	14	3	4	2	19	3	1	3
5	2	3	1	10	4	2	3	15	1	3	4	20	3	1	4

2.3.

$f(x, y) = x^2 + xy + ay^2 - b \ln x - c \ln y \to \min, \ x > 0, \ y > 0$ бодлогын глобаль шийдийг ол.

Хүснэгт 2.3.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3/2	2	1	6	7/3	3	2	11	1/8	8	6	16	7/4	4	1
2	1/2	3	2	7	2/3	3	1	12	4	3	1	17	5/2	4	1
3	5/2	2	1	8	2	3	1	13	3/2	4	2	18	1	5	2
4	1/6	6	5	9	3/4	4	2	14	4/5	5	3	19	3/5	5	1
5	7	2	1	10	2/5	5	3	15	1/2	6	4	20	2/3	6	2

2.4.

$f(x, y) = \exp -(x^2 + y^2)(ax^2 + by^2)$ функцийн R^2 дээрх экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 2.4.

	a	b		a	b		a	b		a	b
1	1	2	6	8	3	11	9	1	16	4	1
2	7	3	7	2	4	12	3	5	17	6	7
3	1	4	8	2	5	13	3	1	18	4	3
4	8	5	9	7	6	14	7	2	19	1	5
5	1	6	10	2	7	15	3	6	20	5	6

2.5.

$f(x,y) = \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ функцийн R^2 дээрх экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 2.5.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	4	-1	2	6	1	3	-4	11	-2	4	1	16	2	3	3
2	4	2	-1	7	-1	3	4	12	4	-2	-1	17	3	1	4
3	1	2	4	8	2	5	2	13	6	1	6	18	6	-1	-2
4	3	1	2	9	1	3	-3	14	6	1	-6	19	1	5	4
5	3	-1	-2	10	2	1	3	15	4	6	-1	20	1	-1	-4

2.6.

$f(x,y) = ax^3 + ax^2y + bx + \frac{1}{3}y^3 + cy$ функцийн R^2 дээрх экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 2.6.

	a	b	c		a	b	c
1	-5/4	-5/2	-11/2	11	-2	-2	-17/8
2	-5/4	5/2	1/2	12	-2	2	7/8
3	-5/4	-10	-22	13	-2	-8	-17/2
4	-5/4	10	2	14	-2	8	7/2
5	-5/4	-5	-11	15	-2	-4	-17/4
6	-5/4	5	1	16	-2	4	7/4
7	-5/4	-5/2	-19/2	17	-2	-2	-7/3
8	-5/4	5/2	-1/3	18	-2	2	2/3
9	-5/4	-15/2	-19	19	-2	-6	-7
10	-5/4	15/2	-1	20	-2	6	2

2.7.

$f(x,y) = x^3y^2(ax+by+c)$ функцийн R^2 дээрх экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 2.7.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	-4	-1	1	6	-2	-1	3	11	-5	-1	5	16	-3	-1	7
2	-3	-1	9	7	-4	1	2	12	-1	1	2	17	-2	-1	2
3	-1	1	3	8	-2	-1	8	13	-1	-1	9	18	-9	1	3
4	-5	-1	4	9	-4	-1	4	14	-3	1	8	19	-2	-1	1
5	-1	-1	7	10	-2	1	6	15	-4	1	5	20	-2	1	9

2.8.

$(0,1)$ цэг нь $f(x,y) = k^3 x \exp y - k^2 a \ln(x + \frac{a-3}{a}y) + ((a+b-1)k - b)x + kcy + 2bxy$ функцийн экстремаль болж байх k параметрийн бүх утгыг тодорхойлж, экстремалийн шинж чанарыг тайлбарла.

Хүснэгт 2.8.

	a	b	c		a	b	c
1	5/2	1/2	-5/2	11	2	-2	-4
2	3/2	-1/2	-3/2	12	3/2	-3	-4
3	-1/2	1/2	7/2	13	1	-4	-4
4	-2	2	8	14	-7/2	5	14
5	-5/2	5/2	19/2	15	-4	6	16
6	-3	3	11	16	7/2	-3/2	-13/2
7	-4	4	14	17	3	-3	-7
8	-5	5	17	18	2	-6	-8
9	-6	6	20	19	5/2	-9/2	-15/2
10	5/2	-1	-4	20	1	-9	-9

Бодлого

2.1.

(2.1)-(2.3) теоремуудыг батал.

2.2.

а. Тоон аргументтэй f функц нь x^* цэг дээр тасралтгүй бөгөөд $U = (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ интервалын үлдсэн x үүд дээр дифференциалчлагддаг байг. $\begin{cases} f'(x) \leq 0, & x^* - \varepsilon < x < x^* \\ f'(x) \geq 0, & x^* < x < x^* + \varepsilon \end{cases}$ гэж үзье. Тэгвэл x^* нь f функцийн U олонлог дээрх минимумын цэг гэж батал.
б. x^* нь f дифференциалчлагддаг функцийн R тоон тэнхлэг дээрх эрс локаль минимумын Дараах функцуудын локаль болон глобаль экстремумын цэгүүдийг тэдгээрийн тодорхойлогдох муж дээр ол.

2.3. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 2z.$

2.4. $f(x, y) = a \exp^{-x} + b \exp^{-y} + \ln(\exp^x + \exp^y)$, *энд* $a > 0,\ b > 0.$

2.5. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$

2.6. $f(x, y) = (x + y)(x - a)(y - b).$

2.7. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5.$

2.8. $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y.$

2.9. $f(x, y) = x \exp^x - (1 + \exp^x) \cos y.$

2.10. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

2.11. $f(x, y, z) = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z).$

Дараах бодлогуудын глобаль шийдийг ол.

2.12. $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \to \min, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

2.13. $f(x,y) = x^2 + y + \frac{1}{x+y} \to \min, \quad x + y > 0.$

2.14.

x^* нь дифференциалчлагддаг функц f-ийн R дээрх цорын ганц стационар цэг бөгөөд локаль минимумын цэг болдог байг. Тэгвэл энэхүү цэг мөн глобаль минимумын цэг болно гэж батал.

2.15.

R^2 дээр яг нэг стационар цэгтэй бөгөөд тэр нь локаль минимумын цэг болоод глобаль минимумын цэг болдоггүй дифференциалчлагддаг функцийн жишээ байгуул.

2.16.

R^2 дээр яг m ширхэг стационар цэгтэй бөгөөд тэдгээр нь бүгдээрээ локаль минимумын цэг байдаг дифференциалчлагддаг функцийн жишээ байгуул.

2.17.

R^2 дээр тэгш тооны стационар цэгтэй бөгөөд тэдгээр нь бүгдээрээ локаль минимумын цэг байдаг дифференциалчлагддаг функцийн жишээ байгуул.

3 бүлэг. Нөхцөлт экстремумын сонгодог бодлого

3.1 Үндсэн ойлголтууд

$X = \{x \in R^n | g_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m\}$ гэсэн төгслөг тооны тэгшитгэлүүдийн системээр өгөгдсөн X олонлог дээр f функцийг минимумчлах (эсвэл максимумчлах) бодлогыг нөхцөлт экстремумын сонгодог бодлого гэнэ. Энэхүү бодлогыг

$$f(x) \to \min,\ g_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m \tag{3.1}$$

гэсэн хэлбэрээр бичье. Хувьсагчийг зайлуулах аргаар шийдийг хайж болно. Боломжит шийдийн олонлог нь n үл мэдэгдэгчтэй, m тэгшитгэлүүдийн системээс тогтож байгаа бөгөөд энэ дүрмээр $m < n$ байна. $x = (u, v) \in R^m \times R^{n-m}$ болон $\forall v \in R^{n-m}$ ын хувьд

$$g_i(u, v) = 0,\ i = \ 1, \dots, m$$

гэсэн m хувьсагчтай m тэгшитгэлүүдийн систем нь $u = u(v)$ гэсэн цорын ганц шийдтэй байг. Тэгвэл (3.1) бодлого нь нөхцөлт биш минимумчлалын дараах бодлого руу шилжинэ.

$$F(v) = f(u(v), v) \to \min,\ v \in R^{n-m}. \tag{3.2}$$

Хэрэв v^* нь энэхүү бодлогын локаль(глобаль) шийд бол мэдээж $(u(v^*), v^*)$ нь (3.1) бодлогын локаль(глобаль) шийд байх бөгөөд урвуу нь хүчинтэй. Нэгэн утгатай функц $u(v)$ нь үргэлж оршдоггүй тул энэхүү хувьсагчийг зайлуулах аргын хэрэглээ нь хязгаарлагдмал байдаг. Түүнээс гадна (3.1) бодлогын хувьд экстремумын нөхцлийг шууд ашигладаг илүү боловсронгүй арга байдаг бөгөөд энэ нь Лагранжийн арга гэдэг. Нөхцөлт экстремумын (3.1) бодлогын хувьд Лагранжийн функцийг бичье:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda g_i(x),$$

Үүнд $x \in R^n,\ \lambda 0 \in R,\ \lambda = (\lambda 1, \ldots, y_m) \in R^m$ байна. Лагранжийн функцийн x ээрх градиент:

$$L'_x(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f'(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda g'_i(x)$$

. Лагранжийн функцийн x ээрх гессиан:

$$L''_x(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f''(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda g''_i(x)$$

. Лагранжийн функц дээр үндэслэгдсэн дараах теорем нь нөхцөлт экстремумын сонгодог онолын үндэс болдог.

Теорем 3.1(1-р эрэмбийн зайлшгүй нөхцөл буюу Лагранжийн зарчим) f функц нь $x^* \in R^n$ цэг дээр дифференциалчлагддаг бөгөөд $g_1, \ldots, g_m$ функцууд нь энэхүү цэгийн ямар нэгэн орчинд тасралтгүй дифференциалчлагддаг байг. Тэгвэл хэрэв x^* нь (3.1) бодлогын локаль шийд бол нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцүү биш λ_0^* тоо болон $\lambda^* \in R^m$ вектор нь

$$L'_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0, \tag{3.3}$$

нөхцлийг хангаж байхаар олдоно. $x^* \in X$ цэг нь ямар нэгэн нэгэн зэрэг тэг биш $\lambda_0^* \geq 0$ тоо болон $\lambda^* \in R^m$ векторын хувьд (3.4) ыг хангаж байвал түүнийг (3.1) бодлогын стационар цэг гэнэ. Энэ тохиолдолд $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ тоонуудыг x^* д харгалзах Лагранжийн үржигдэхүүнүүд гэнэ. (3.4) тэнцэтгэл нь $x^* \in X$ нөхцлийн хамтаар $n + m + 1$ үл мэдэгдэгчтэй $n+m$ тэгшитгэлүүдийн системийг үүсгэнэ. Иймд үргэлж $n+m$ хувьсагчтай системд шилжиж болох ба $\lambda_0^* = 0$ эсвэл $\lambda_0^* = 1$ гэсэн хоёр тохиолдлыг ямагт авч үздэг. Лагранжийн регуляр функц дараах хэлбэртэй:

$$L(x, y) = L(x, 1, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda g_i(x),$$

Теорем 3.2(2-р эрэмбийн зайлшгүй нөхцөл) $f, g_1, \ldots, g_m$ функцууд нь $x^* \in R^n$ цэг дээр хоёр удаа дифференциалчлагддаг байг. Түүнчлэн $g_1, \ldots, g_m$ функцууд нь x^* цэгийн ямар нэг орчинд тасралтгүй дифференциалчлагддаг бөгөөд тэдгээрийн градиентууд $g'_1(x^*), \ldots, g'_m(x^*)$ нь шугаман хамааралгүй байг. Тэгвэл хэрэв x^* нь (3.1) бодлогын локаль шийд бол (3.4)-ийг хангах бүх $\lambda_0^* > 0,\ \lambda^* \in R^m$ болон

$$< g'_i(x^*), h >= 0,\ i = 1, \ldots, m \tag{3.4}$$

нөхцлийг хангах бүх $h \in R^n$ -ийн хувьд

$$< L''_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)h, h > \geq 0 \qquad (3.5)$$

байна.

Теорем 3.3(2-р эрэмбийн хүрэлцээтэй нөхцөл) $f, g_1, \dots, g_m$ функцууд нь $x^* \in X$ цэг дээр хоёр удаа дифференциалчлагддаг байг. Тэгвэл хэрэв (3.4)-ийг хангах $\lambda_0^* \geq 0$ болон $\lambda^* \in R^m$ олдоод (3.6)-г хангах бүх $h \neq 0$-ийн хувьд

$$< L''_x(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)h, h >> 0 \qquad (3.6)$$

нөхцөл биелдэг бол x^* нь (3.1) бодлогын эрс локаль шийд байна.

Дасгал

3.1.

Дараах бодлогыг эхлээд хувьсагчийг зайлуулах аргаар, дараа нь Лагранжийн аргаар бод.

$$xy^3 \to \max, \quad ax + by = c$$

Хүснэгт 3.1.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	3	7	6	2	5	6	11	3	1	10	16	6	2	4
2	1	5	8	7	1	4	8	12	1	5	10	17	6	2	8
3	3	1	6	8	3	5	7	13	2	7	10	18	8	2	5
4	2	4	9	9	4	3	6	14	4	4	8	19	8	2	10
5	4	1	6	10	1	6	9	15	4	2	12	20	8	3	11

3.2.

$x^2 + y^2 = c^2$ гэсэн нөхцөлд $f(x, y) = ax + by$ функцийн экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 3.2.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	-3	5	6	7	2	4	11	-2	-5	5	16	5	1	3
2	4	1	3	7	-2	6	2	12	5	-3	1	17	-1	5	1
3	-3	4	2	8	-1	7	5	13	-5	-1	2	18	2	5	2
4	-2	1	1	9	-4	-1	3	14	-7	-1	4	19	-5	3	5
5	2	3	4	10	-2	-3	1	15	1	-7	3	20	1	7	4

3.3.

$4x^2 + cy^2 = 9$ гэсэн нөхцөлд $f(x, y) = ax^2 + 2xy + by^2$ функцийн экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 3.3.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	1	3	6	3	2	2	11	5	8	6	16	7	4	2
2	3	4	5	7	5	4	3	12	5	3	2	17	13	4	1
3	1	1	2	8	3	5	6	13	9	3	1	18	7	11	6
4	1	2	6	9	7	9	5	14	9	7	3	19	9	5	2
5	1	1	1	10	5	2	1	15	3	6	7	20	7	13	7

3.4.

$x^2 + y^2 = c^2$ гэсэн нөхцөлд $f(x, y) = ax^3 + by^3$ функцийн экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 3.4.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	2	2	6	3	1	3	11	1	8	1	16	2	3	4
2	7	3	3	7	4	3	4	12	4	1	5	17	2	7	1
3	1	2	5	8	1	4	5	13	5	3	4	18	8	1	2
4	7	2	1	9	5	2	2	14	2	5	3	19	1	3	5
5	3	4	2	10	3	5	1	15	2	1	2	20	3	7	3

3.5.

$ax^3 + by^3 - 3cxy = d$ гэсэн нөхцөлд $f(x, y) = y^2$ функцийн экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 3.5.

	a	b	c	d		a	b	c	d		a	b	c	d		a	b	c	d
1	9	2	9	-16	6	12	1	6	-16	11	-1	2	1	-4	16	-7	16	7	-2
2	-36	1	9	8	7	1	2	1	4	12	-4	1	2	-16	17	28	1	7	8
3	-9	2	9	16	8	4	1	2	16	13	-18	4	9	4	18	1	2	1	12
4	7	2	7	16	9	-7	2	7	-16	14	9	16	9	-2	19	1	16	2	12
5	3	2	3	-4	10	36	1	9	-8	15	14	4	7	4	20	1	1	1	3

3.6.

$ax + by + c^2z^2 = \frac{3}{2}$ гэсэн нөхцөлд $f(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 + cz + 2(abxy + bcyz + acxz)$ функцийн экстремумын цэгүүдийг ол.

Хүснэгт 3.6.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	-5	1	-2	6	6	-1	1	11	5	-4	1	16	6	3	-5
2	1	-4	5	7	1	5	-2	12	-4	2	3	17	-1	7	1
3	-6	5	4	8	-3	2	4	13	1	6	-3	18	5	2	-4
4	1	2	-3	9	-5	2	-5	14	-3	-5	4	19	-3	7	5
5	3	-4	2	10	3	-6	3	15	6	4	-5	20	5	3	-2

3.7.

R^4 огторгуйд координатын эхийн

$$X = \{x \in R^4 | \ x_1 + ax_2 - x_4 = b, \ x_1 + ax_3 + x_4 = c\}$$

олонлог дээрх проекцийг ол.

Хүснэгт 3.7.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	9	6	6	2	9	-9	11	1	6	6	16	1	6	-9
2	2	9	-6	7	2	-9	9	12	1	6	-6	17	1	-6	9
3	2	-9	6	8	2	-9	-9	13	1	-6	6	18	1	-6	-9
4	2	-9	-6	9	2	9	18	14	1	-6	-6	19	1	6	12
5	2	9	9	10	2	9	-18	15	1	6	9	20	1	6	-12

3.8.

$x^4 e^y + y^2 e^x = 1$ нөхцөлд $(0, 1)$ цэг нь

$$f(x, y) = \ln(ax + 2k^2 y) - kbxy + \frac{b}{k}x + cy$$

функцийн экстремумын цэг болж байх k параметрийн бүх утгыг олж, экстремумын шинж чанарыг тодорхойл.

Хүснэгт 3.8.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	4	4	3	6	3	3	2	11	2	2	1	16	1	1	0
2	4	-4	3	7	3	-3	2	12	2	-2	1	17	1	-1	0
3	4	-1	3	8	3	-3/4	2	13	2	-1/2	1	18	1	-1/3	0
4	4	1	3	9	3	3/4	2	14	2	1/2	1	19	1	1/3	0
5	4	-2/3	3	10	3	-1/2	2	15	2	-1/3	1	20	1	-1/6	0

Бодлого

Дараах функцуудын өгөгдсөн хязгаарлалт дахь экстремумын цэгүүдийг ол.

3.1. $f(x, y) = y, \ x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

3.2. $f(x, y) = x^3 + y^3, \ ax + by = 1,$ *энд* $a > 0, \ b > 0.$

3.3. $f(x, y) = \dfrac{1}{3}x^3 + y, \ x^2 + y^2 = a,$ *энд* $a > 0.$

3.4. $f(x, y) = x \sin y, \ 3x^2 - 4 \cos y - 1 = 0.$

3.5. $f(x, y, z) = xyz, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x + y + z = 1.$

3.6. $f(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ *энд* $a > b > c > 0.$

3.7. $f(x, y, z) = x + y + z^2 + 2(xy + yz + zx), \quad x^2 + y^2 + z = 1.$

Дараах бодлогуудын глобаль шийдүүдийг ол.

3.8. $\prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \to \max,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j^{\beta_j} = b,\quad x_j \geq 0,\quad j=1,...,n$ *энд* $\alpha_j > 0,\ \beta_j > 0,\ a_j > 0,\ b > 0.$

3.9. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha_j} \to \min,\ \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j} = b,\quad x_j \geq 0,\quad j=1,...,n$ *энд* $c_j > 0,\ \alpha_j > 0,\ \beta_j > 0,\ b > 0.$

3.10. $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{c_j}{x_j^{\alpha_j}} \to \min,\ \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j} = b,\quad x_j > 0,\quad j=1,...,n$ *энд* $c_j > 0,\ \alpha_j > 0,\ \beta_j > 0,\ b > 0.$

3.11. $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{c_j}{x_j^{\alpha}} \to \max,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b,\quad x_j \geq 0,\quad j=1,...,n$ *энд* $c_j > 0,\ \alpha > 0,\ a_j > 0,\ b > 0.$

3.12. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha} \to \max,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b,\quad x_j > 0,\quad j=1,...,n$ *энд* $c_j > 0,\ a_j > 0,\ b > 0,\ 0 < \alpha < 1.$

3.13. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha} \to \min,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$ *энд* $c_j > 0,$ α*-тэгш натурал тоо,* $a = (a_1, ..., a_n) \neq 0.$

3.14. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j |x_j|^{\alpha} \to \min,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$ *энд* $c_j > 0,\ \alpha > 1,\ a = (a_1, ..., a_n) \neq 0,\ b > 0.$

3.15. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j^{\alpha} = b,$ *энд* $c = (c_1, ..., c_n) \neq 0,\ a_j > 0,\ b > 0,$ α*-тэгш натурал тоо.*

3.16. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j |x_j|^{\alpha} = b,$ *энд* $c = (c_1, ..., c_n) \neq 0,\ a_j > 0,\ b > 0,\ \alpha > 1.$

3.17. $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j + c_j|^{\alpha} \to \max(\min),\ \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^{\alpha} = b,$ *энд* $c = (c_1, ..., c_n) \neq 0,\ \alpha > 1,\ b > 0.$

3.18. $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 \to \min,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = 1, 2,$ *энд* $a_{ij},\ b_i$*-өгөгдсөн тоонууд,* $a_i = (a_{i1}, ..., a_{ij}, ..., a_{in})$ $(i = 1, 2)$ *векторууд нь шугаман хамааралгүй.*

4 бүлэг. Шугаман програмчлал

4.1 Полиэдр болон түүний оройнууд

$H_{ab} = \{x \in R^n |\ < a, x >= b\},\ a \in R^n,\ a \neq 0,\ b \in R$ олонлогийг гипер хавтгай, $H_{ab}^{+} = \{x \in R^n |\ < a, x > \geq b\}, H_{ab}^{-} = \{x \in R^n |\ < a, x > \leq b\}$, олонлогуудыг гиперхавтгайнуудаар төрөгдсөн хагас огторгуйнууд гэж нэрлэнэ.

Хэрэв $X \in R^n$ олонлогийг төгслөг тооны хагас огторгуйнуудын огтлолцол мэтээр тавьж болдог бол түүнийг полиэдр гэнэ.

$$X = \{x \in R^n | Ax \leq b\} = \{x \in R^n | < a_i, x > \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}, \tag{4.1}$$

Үүнд $A \in\ A(m, n),\ b \in R^m$. $\forall x \in X$ ын хувьд $I(x)$ ээр (4.1) ийн өгсөн цэг дээр тэнцэтгэл болж байдаг тэнцэтгэл бишүүдийн дугааруудын олонлогийг тэмдэглэе.

$$I(x) = \{i,\ 1 \leq i \leq m | < a_i, x >= b_i\} \tag{4.2}$$

Хэрэв $x^* \in X$ болон $a_i,\ i \in I(x^*)$ векторуудаас n шугаман хамааралгүй вектор сонгон авч болдог өөрөөр хэлбэл $rangA_{I(x^*)} = n$ бол x^*-г (4.1) ээр тодорхойлогдох X полиэдрийн орой гэнэ. Өөрөөр хэлбэл $x^* \in R^n$ нь

$$A_{I(x^*)}x = b_{I(x^*)}$$

систем тэгшитгэлүүдийн цорын ганц шийд болж байвал тэрээр X ын орой болно. Иймд x^* нь орой байхын тулд зайлшгүй $|I(x^*)| \geq n$ байх ёстой болно. Хэрэв $|I(x^*)| = n$ бол x^* оройг бөхөөгүй, эсрэг тохиолдолд бөхсөн орой гэнэ.

Терем 4.1 Аливаа полиэдр нь төгслөг тооны оройн цэгүүдтэй байна.

Полиэдр нь оройн цэггүй байж болох бөгөөд үүний жишээ бол хагас хавтгай юм.

Терем 4.2 (4.1) хэлбэртэй X полиедр нь ядаж нэг оройн цэгтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $rang(A) = n$ юм. Түүнчлэн дээрх нөхцөл биелж байхад $\forall x \in X$ хувьд $I(x) \subset I^*(x)$ байх x^* орой олдоно. $< a, x >= b$ тэнцэтгэл нь $< a, x > \leq b$, $< a, -x > \leq -b$ тэнцэтгэл бишүүдтэй тэнцүү чанартай. Иймд

$$X = \{x \in R^n | < a_i, x > \leq b_I,\ I = 1, \dots, k,\ \ < a_i, x >= b_{,}\ i = k+1, \dots, m\} \tag{4.3}$$

олонлог нь полиэдр болно.

Дасгал

4.1.

Дараах тэнцэтгэл бишийн системээр тодорхойлогдох полиэдрийг хавтгай дээр байгуулж, оройн цэгүүдийг ол.

$$3x_1 + x_2 \leq 18, \quad 4x_1 - ax_2 \geq -24,$$
$$bx_1 - 12x_2 \leq 36, \quad cx_1 + 3x_2 \geq -27,$$

Хүснэгт 4.1.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	2	1	6	2	3	2	11	2	4	3	16	2	2	4
2	3	3	1	7	3	4	2	12	3	2	3	17	3	3	4
3	4	4	1	8	4	2	2	13	4	3	3	18	4	4	4
4	6	2	1	9	6	3	2	14	6	4	3	19	6	2	4
5	8	3	1	10	8	4	2	15	8	2	3	20	8	3	4

4.2.

Дараах системээр R^2 дээр тодорхойлогдох полиэдрийн оройнууд дунд бөхсөн орой байх k параметрийн бүх утгуудыг ол.

$$x_1 + ax_2 \leq 8, \quad bx_1 + x_2 \leq 12,$$
$$2x_1 + cx_2 \leq k, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

Хүснэгт 4.2.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	6	1	6	2	6	2	11	2	6	3	16	2	4	1
2	4	3	1	7	4	6	3	12	4	6	1	17	4	6	2
3	4	4	1	8	4	2	5	13	1	4	1	18	2	3	3
4	4	2	3	9	4	3	5	14	2	2	2	19	2	4	3
5	4	3	3	10	4	6	5	15	2	3	1	20	4	4	5

4.3.

Дараах системээр тодорхойлогдох полиэдр R^4 д ядаж нэг оройн цэгтэй байх k параметрийн бүх утгуудыг ол.

$$\begin{aligned} (k+a)x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &\le 1, \\ bx_1 + kx_2 + 4x_3 + 5x_4 &\le 2, \\ (k+c)x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\le 3, \\ x_3 \ge 0, \quad x_4 &\ge 0, \end{aligned}$$

Хүснэгт 4.3.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	6	5	6	5	6	7	11	9	-8	7	16	5	24	11
2	11	-18	7	7	3	-2	1	12	11	-28	3	17	9	-20	1
3	13	-42	1	8	3	40	13	13	1	12	7	18	13	-22	9
4	7	-10	3	9	1	30	11	14	5	14	9	19	3	4	5
5	9	10	11	10	9	-18	3	15	13	-36	5	20	7	30	13

4.4.

Дараах системээр R^3 дээр тодорхойлогдох полиэдрийн оройнуудыг ол.

$$\begin{aligned} &ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + bx_2 + x_3 = 0, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \le (a-1)(b-1), \quad x_3 \le c(ab-1); \end{aligned}$$

Хүснэгт 4.4.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	3	-1	6	7	3	-3	11	6	2	8	16	2	9	2
2	4	8	2	7	5	4	5	12	4	2	1/3	17	6	7	4
3	5	7	1/2	8	4	9	6	13	7	4	7	18	7	2	-3
4	2	4	3	9	3	5	-2	14	5	6	-1	19	9	7	9
5	8	2	1/5	10	2	5	3	15	6	7	1/5	20	5	8	1/4

4.5.

Дараах системээр R^4 дээр тодорхойлогдох полиэдрийн бүх оройнуудыг олж, тэдэн дунд бөхсөн орой байх эсэхийг шинжил.

$$\begin{aligned} &ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ &x_1 + bx_2 + cx_3 + x_4 = 1, \\ &x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4, \end{aligned}$$

Хүснэгт 4.5.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	6	-2	6	2	4	-4	11	3	2	0	16	6	5	-3
2	2	3	0	7	3	5	-2	12	4	5	-3	17	2	6	-1
3	5	4	-1	8	3	4	-1	13	5	2	-1	18	4	2	-4
4	6	2	-3	9	2	5	0	14	4	3	-4	19	5	6	0
5	5	3	-4	10	6	3	-3	15	6	4	-2	20	4	6	-2

4.6.

Геометр байгуулалтын тусламжтайгаар дараах систем нийцтэй байх k параметрийн бүх утгыг ол.

$$\begin{aligned}
&ax_1 + b_2 + x_3 + (c+1)x_4 = k,\\
&(a+3)x_1 + (b+2)x_2 + x_3 + cx_4 = 2-k,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 4,
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.6.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	5	1	2	6	11	4	2	11	10	3	3	16	10	4	1
2	12	4	3	7	6	2	1	12	10	2	5	17	11	3	4
3	8	1	5	8	13	4	4	13	6	1	3	18	4	1	1
4	9	3	2	9	7	2	2	14	12	3	5	19	14	4	5
5	7	1	4	10	8	3	1	15	9	2	4	20	8	2	3

4.7.

Геометр байгуулалтын тусламжтайгаар дараах импликаци үнэн байх k параметрийн бүх утгыг ол.

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 12,\\
0 \leq x_1 &\leq a,\\
0 \leq x_2 &\leq b
\end{aligned}\right\} \rightarrow cx_1 + 5x_2 \leq k:$$

Хүснэгт 4.7.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	8	7	2	6	10	8	1	11	8	10	7	16	10	7	1
2	7	8	7	7	11	7	6	12	9	11	2	17	11	10	8
3	10	11	4	8	8	9	8	13	7	9	6	18	7	11	3
4	11	9	1	9	7	10	2	14	10	9	8	19	8	11	6
5	9	7	6	10	9	8	7	15	11	7	3	20	9	10	4

Бодлого

4.1. *R^4 дээр дараах системээр өгөгдөх аффин олонлогийн хэмжээсийг ол.*

а)
$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + 2x_4 &= -4,\\
2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1,\\
x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3;
\end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1,\\
x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -3,\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2;
\end{aligned}$$

в) $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -2,$
$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 3,$
$-x_2 + x_3 + 3x_4 = 1;$

4.2. *a параметрийн бүх боломжит утганд дараах системээр өгөгдөх аффин олонлогийн хэмжээсийг ол.*

$$x_1 + 2x_2 + ax_3 + x4 + 3x_5 = 10, \quad 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = -7$$
$$3x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 + 4x_5 = 3, \quad 4x_1 + x_2 + 11x_3 + 7x_5 = 13.$$

4.3. *Дараах системээр өгөгдөх $X \subset R^4$ полиэдр хоосон биш болохыг харуулж, $I(X)$ ийг ол.* $I(x) = \{i,\ 1 \leq i \leq m \mid < a_i, x >= b_i,\ \forall x \in X\}$.

$$-x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 0, \quad 4x_1 - 7x_2 + x_3 - 7x_4 \leq -9,$$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 1, \quad x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3,$$

4.4. *Дараах системээр өгөгдөх $X \subset R^4$ полиэдр аффин олонлог болохыг харуулж, хэмжээсийг ол.*

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 1, \quad -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 \leq -3,$$
$$-3x_1 - 3x_2 + 10x_3 + x_4 \leq -1, \quad x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 \leq 2,$$

4.5. *Дараах системээр өгөгдсөн X полиэдр хоосон биш байх a параметрийн бүх утгыг олж $I(x)$-г ол.*

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 \leq 11, \quad 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 \leq -1,$$
$$3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq a, \quad -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8,$$

4.6. *Дараах полиэдрүүдийн хэмжээсийг ол. Үүнд: $dimX = n - rangA_{I(x)}$.*

а) $2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 5,$
$x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq -2,$
$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0;$

б) $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3,$
$-4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq -33,$
$x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 \leq -10,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 15,$

в) $2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 \leq 7,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5;$

г) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 0,$
$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0.$

4.7. *Геометр байгуулалтын аргаар дараах полиэдрүүдийн бүх оройг тодорхойл.*

а) $2x_1 + x_2 \leq 8,$
$2x_1 - 5x_2 \leq 20,$
$-x_1 + x_2 \leq 2,$
$x_1 \geq -5;$

б) $x_1 + x_2 \leq 6,$
$-3x_1 + x_2 \leq 9,$
$x_1 + 2x_2 = 4;$

в) $-3x_1 + 6x_2 \leq 13,$
$3x_1 + x_2 \leq 9,$
$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$

г) $-3x_1 + 2x_2 \leq 0,$
$x_1 - x_2 \leq -1,$
$-x_1 + 2x_2 \leq 4.$

4.8. *Дараах өгөгдсөн полиэдр нь бөхсөн оройтой байх а параметрийн утгыг ол.*

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 &\le 1, \quad & 2x_1 + x_2 &\le 6, \\ -x_1 + x_2 &\le 6, \quad & x_1 + 2x_2 &\ge 6, \end{aligned}$$

4.9. *Өгөгдсөн полиэдр нь ядаж ганц оройтой байх а параметрийн бүх утгыг ол.*

$$\begin{aligned} ax_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 &\le 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 + 2x_5 &\le 0, \\ -4x_2 + 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 &\le 1, \\ 2x_4 + x_5 &\le 3, \\ x_4 + x_5 &\ge -1, \end{aligned}$$

4.10. *Доорх полиэдрүүдийг бүх оройг ол.*

а) $$\begin{aligned} & x_1 - 2x_2 + 5x_3 \le 4, \\ & 4x_1 - x_2 + 6x_3 \le 9, \\ & 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \ge 1, \\ & x_1 + 5x_2 - 2x_3 \ge -3; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 8, \\ & 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \le -5, \\ & 4x_1 + 7x_2 + x_3 \le 12, \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 \le 15, \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 43, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1; \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 2, \\ & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ & x_1 - x_2 + x_3 \le 0, \\ & -x_1 + 5x_2 + x_3 = 8. \end{aligned}$$

4.11. *Өгөгдсөн полиэдрүүдийн бүх оройг ол.*

а) $$\begin{aligned} & x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} & 4x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4; \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ & 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4; \end{aligned}$$

4.12. *Геометр байгуулалтын аргаар дараах полиэндрийн оройг ол.*

$$\begin{aligned} & -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1, \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5; \end{aligned}$$

4.13. *Дараах полиэндр нь бөхсөн оройтой байх k параметрийн бүх оройг ол.*

$$\begin{aligned} & kx_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 5, \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4; \end{aligned}$$

4.14. *Өгөгдсөн полиэндрийн хэмжээсийг олж бүх оройнуудыг тодорхойл.*

$$X = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \le 1,\ x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., n \right. \right\}.$$

4.15. *Өгөгдсөн полиэндрийн хэмжээсийг олж бүх оройнуудыг тодорхойл.*

$$X = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \left| \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., n \right. \right\}.$$

4.2 Шугаман программчлалын бодлогын тавил болон хэлбэрүүд

Шугаман функцийг олон талст олонлог дээр максимумчлах эсвэл минимумчлах бодлогыг шугаман программчлалын бодлого (ШПБ) гэнэ. ШПБ-ыг дараах байдлаар бичиж болно.

$$< c, x > \to \max, \quad Ax \le b \tag{4.4}$$

энд A- $m \times n$ матриц, $b \in R^m,\ c \in R^n.$ Бодлогын боломжит шийдийн мужийг дараах байдлаар бичье.

$$X = \{ x \in R^n | Ax \le b \} \tag{4.5}$$

Теорем 4.3 Шугаман програмчлалын бодлогын дурын локаль шийд нь глобаль шийд болно.

(4.4) бодлогын шийдийн олонлог X^* нь мөн полиэдр байх бөгөөд хэрвээ тэрээр хоосон биш бол дараах хэлбэртэйгээр бичигдэнэ.

$$X^* = \{ x \in R^n | Ax \le b, < c, x > \ge f^* \}, \tag{4.6}$$

Үүнд f^* нь (4.4) бодлогын утга, ө.х. $f^* = \sup\limits_X < c, x >$.
(4.4) хэлбэрийн бодлогыг үндсэн бодлого гэж нэрлэдэг. Шугаман программчлалын максимумчлах бодлогыг боломжит шийдийн мужаас нь хамааруулсан өөр өргөтгөсөн бичлэгүүдийн хэлбэрүүдийг үзье. Үүний тулд өмнө тэмдэглэсэн ёсоор $A \in A(m, n),\ b \in R^m,\ c \in R^n$ гэж үзнэ. ШП-ын стандарт бодлого:

$$< c, x > \to \max,\ Ax \le b,\ x \ge 0. \tag{4.7}$$

ШП-ын каноник бодлого:

$$< c, x > \to \max,\ Ax = b,\ x \ge 0. \tag{4.8}$$

ШП-ын ерөнхий бодлого:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \dots k, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = k+1, \dots m, \end{gathered} \tag{4.9}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, s.$$

Ерөнхийдөө (4.4), (4.7) болон (4.8) бодлогуудын аль нь ч (4.9) ерөнхий бодлогын тухайн тохиолдлууд байна. Мөн түүнчлэн ерөнхий бодлого нь өөрөө үлдсэн гуравынхаа аль ч хэлбэртэй нь адилхан байдлаар бичигдсэн байж болно.

Дасгал

4.8.

Дараах бодлогыг стандарт хэлбэрт шилжүүл:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \sim 1, \\ 3x_2 + x_3 \approx 2, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 \infty 4, \\ x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0: \end{aligned}$$

Хүснэгт 4.8.

	$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞
1	$\geq$	$=$	$\leq$	6	$=$	$\leq$	$=$	11	$=$	$\geq$	$=$	16	$\leq$	$\leq$	$=$
2	$=$	$\leq$	$\geq$	7	$\leq$	$=$	$\geq$	12	$=$	$=$	$\leq$	17	$\geq$	$\geq$	$\leq$
3	$\leq$	$=$	$=$	8	$\geq$	$=$	$=$	13	$\geq$	$\geq$	$=$	18	$\geq$	$\leq$	$=$
4	$=$	$\geq$	$\geq$	9	$=$	$\geq$	$\leq$	14	$\leq$	$\geq$	$\geq$	19	$\geq$	$\leq$	$\geq$
5	$\geq$	$=$	$\geq$	10	$\leq$	$\geq$	$=$	15	$=$	$=$	$\geq$	20	$\leq$	$\leq$	$\geq$

4.9.

Дараах бодлогыг каноник хэлбэрт шилжүүл.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \sim 2, \\ -x_1 + x_2 + x_4 \approx 1, \\ x_2 + x_3 \infty 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0: \end{aligned}$$

Хүснэгт 4.9.

	$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞
1	$\geq$	$=$	$\leq$	6	$=$	$\leq$	$\leq$	11	$\geq$	$\leq$	$\leq$	16	$=$	$=$	$\geq$
2	$\geq$	$\geq$	$\leq$	7	$\leq$	$\geq$	$\leq$	12	$=$	$\leq$	$\geq$	17	$\geq$	$=$	$\geq$
3	$\geq$	$\leq$	$\geq$	8	$\leq$	$\leq$	$\geq$	13	$\geq$	$\geq$	$=$	18	$\leq$	$\geq$	$=$
4	$=$	$\geq$	$\geq$	9	$\leq$	$\geq$	$\geq$	14	$\leq$	$=$	$\leq$	19	$=$	$=$	$\leq$
5	$\geq$	$\leq$	$=$	10	$\leq$	$\leq$	$=$	15	$=$	$\geq$	$\leq$	20	$\leq$	$=$	$\geq$

[4.10-4.13] бодлогуудыг график аргаар бод.

4.10.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + ax_2 \to \max, \\
&x_1 + 2x_2 \le 10, \\
&3x_1 + 2x_2 \le 18, \\
&x_1 - x_2 \ge -b, \\
&cx_1 - x_2 \le 8c + 3 \quad *):
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.10.

	a	b	c		a	b	c
1	5	7	2	11	-5/6	8	1/4
2	1	6	3	12	3	13/2	2
3	-1	6	1/8	13	1	9	1
4	5	9	1	14	-1/3	10	2
5	3/4	7	1	15	7/4	6	3
6	-1/4	10	2	16	-3/4	13/2	1/2
7	4	12	1/2	17	3/2	7	2
8	5/4	9	1/3	18	3	6	1
9	-1	6	1/2	19	4	8	3/4
10	5/6	7	1	20	-1	15/2	1/3

4.11.

$$
\begin{aligned}
&ax_1 + x_2 \to \min, \\
&x_1 + (b-3)x_2 \ge b, \\
&(c-4)x_1 + x_2 \ge c, \\
&x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0:
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.11.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1/4	5	9	6	1/2	7	6	11	7/2	5	7	16	1/2	4	9
2	5/4	4	6	7	1/6	8	8	12	9/2	6	9	17	5/3	8	6
3	9/2	7	8	8	5/2	4	7	13	1/5	7	7	18	3/4	5	6
4	7/4	8	7	9	13/3	5	8	14	7/2	4	8	19	1/4	6	8
5	5/2	6	6	10	2/3	6	7	15	1/3	8	9	20	11/2	7	9

4.12.

$$
\begin{aligned}
&ax_2 - 3x_3 \to \max, \\
&2x_1 + bx_2 + x_3 \le 15, \\
&2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 0, \\
&cx_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\
&x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0:
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.12.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	10	2	3	6	-2	2	2	11	-1	5	3	16	-2	5	2
2	-1	1	2	7	2	3	4	12	6	6	4	17	4	4	3
3	3	5	4	8	5	5	3	13	10	1	2	18	12	2	4
4	-3	4	2	9	11	1	4	14	-3	3	3	19	5	3	2
5	12	3	3	10	7	7	2	15	7	3	4	20	-1	3	4

4.13.

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_3 + ax_4 + bx_5 \to \max, \\
&x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = c - 15, \\
&x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24, \\
&x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = c + 24, \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5:
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.13.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	5	6	6	1	1	7	11	1	2	8	16	2	2	6
2	5	2	7	7	6	3	8	12	8	4	6	17	1	3	7
3	1	5	8	8	2	1	6	13	2	5	7	18	7	4	8
4	3	-1	6	9	3	0	7	14	9	5	8	19	6	2	6
5	4	3	7	10	5	7	8	15	7	-1	6	20	3	3	7

4.14.

Дараах бодлогын шийд $x^1 = \left(0, \frac{1}{2b}, 0\right)$, $x^2 = \left(5, 0, \frac{5a}{3c}\right)$, $x^3 = \left(3, \frac{3a+2}{2b}, 0\right)$ цэгүүд дээр орших уу?

$$\begin{aligned}
&(4 - 5a)x_1 + 10bx_2 + 15cx_3 \to \max, \\
&(2a + 1)x_1 - 4bx_2 - 6cx_3 \leq 13, \\
&(5 - 4a)x_1 + 8bx_2 + 12cx_3 \leq 23, \\
&-(3a + 1)x_1 + 6bx_2 + 9cx_3 \leq 3
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.14.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	-1	1	3	6	3	-1	8	11	5	-2	6	16	1	-1	3
2	-1	1	6	7	-3	2	3	12	5	-2	8	17	1	-1	6
3	-1	1	8	8	-3	2	6	13	-3	1	3	18	1	-1	8
4	3	-1	3	9	-3	2	8	14	-3	-1	6	19	3	-2	3
5	3	-1	6	10	5	-2	3	15	-3	1	8	20	3	-2	8

4.15.

p, q-ийн ямар утганд 1) бодлогын боломжит шийдийн олонлог хоосон байх вэ? 2) функцийн утга ∞ байх 3) цор ганц шийдтэй байх 4) Тоо тоймшгүй олон шийдтэй байх.

$$\begin{aligned} & ax_1 + bx_2 \to \max, \\ & x_1 + px_2 \le 1, \\ & x_1 - x_2 \ge q, \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

Хүснэгт 4.15.

	a	b		a	b		a	b		a	b
1	3	5	6	2	1	11	7	3	16	2	5
2	3	7	7	6	5	12	7	4	17	5	2
3	2	3	8	3	7	13	3	2	18	2	7
4	8	3	9	5	8	14	5	3	19	7	2
5	3	4	10	4	7	15	5	6	20	3	1

4.16.

k-ийн ямар утганд $x^* = (b, 0)$ доорх бодлогын шийд болох вэ?

$$\begin{aligned} & kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \\ & ax_1 - bx_2 \le 0, \\ & 2x_1 + 3x_2 \le c, \\ & x_1 + x_2 \le a + b: \end{aligned}$$

Хүснэгт 4.16.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	4	-3	7	6	3	1	13	11	3	-1	8	16	5	1	20
2	3	2	14	7	3	-1	9	12	3	-2	7	17	5	2	20
3	2	-1	5	8	4	-1	12	13	4	2	16	18	5	-3	11
4	5	-2	13	9	4	-2	10	14	4	3	19	19	6	-5	10
5	4	4	25	10	4	1	15	15	5	-1	14	20	6	-4	11

4.17.

ШПБ-ын шийдийг түүврийн аргаар ол.

$$\begin{aligned} & ax_1 + x_2 + 8x_3 \to \max, \\ & x_1 + bx_2 + x_3 \ge 1, \\ & x_1 + x_2 + cx_3 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0: \end{aligned}$$

Хүснэгт 4.17.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	4/3	4	5	6	4/3	4	6	11	7/3	4	3	16	3/2	2	5
2	3/2	6	4	7	16/5	3	2	12	19/5	6	2	17	7/4	5	4
3	7/3	2	3	8	6/5	2	6	13	3/2	2	4	18	15/4	7	2
4	6/5	3	6	9	9/5	3	4	14	5/3	6	5	19	4/3	5	6
5	5/4	2	7	10	7/2	4	2	15	7/2	5	2	20	7/3	6	3

4.18.

ШПБ-ын шийдийг түүврийн аргаар ол.

$$\begin{aligned}&x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \to \max,\\ &ax_1 - x_2 + x_3 + bx_4 = 120,\\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\\ &x_1 + x_2 + x_3 + cx_4 = 120,\\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 4:\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.18.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	2	2	6	1	5	5	11	1	0	0	16	1	3	3
2	3	5	2	7	2	8	5	12	3	1	0	17	2	5	3
3	5	8	2	8	3	11	5	13	5	2	0	18	3	7	3
4	7	11	2	9	4	14	5	14	7	3	0	19	4	9	3
5	9	14	2	10	5	17	5	15	9	4	0	20	5	11	3

4.19.

Дараах бодлогуудын хосмог бодлогыг байгуул.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\to \max,\\ 3x_1 - 4x_2 &\sim 1,\\ 5x_1 + 6x_2 &\approx 2,\\ -7x_1 + 8x_2 &\infty 3,\\ x_2 &\geq 0:\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.19.

	$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞		$\sim$	$\approx$	∞
1	$\geq$	$=$	$\leq$	6	$=$	$\leq$	$\leq$	11	$\geq$	$\leq$	$\leq$	16	$=$	$=$	$\geq$
2	$\geq$	$\geq$	$\leq$	7	$\leq$	$\geq$	$\leq$	12	$=$	$\leq$	$\geq$	17	$\geq$	$=$	$\geq$
3	$\geq$	$\leq$	$\geq$	8	$\leq$	$\leq$	$\geq$	13	$\geq$	$\geq$	$=$	18	$\leq$	$\geq$	$=$
4	$=$	$\geq$	$\geq$	9	$\leq$	$\geq$	$\geq$	14	$\leq$	$=$	$\leq$	19	$=$	$=$	$\leq$
5	$\geq$	$\leq$	$=$	10	$\leq$	$\leq$	$=$	15	$=$	$\geq$	$\leq$	20	$\leq$	$=$	$\geq$

4.20.

Дараах бодлогын боломжит шийд $x^1 = \left(\frac{a+4c}{7}, \frac{2a+c}{7}, 0\right)$, $x^2 = \left(\frac{4a+c}{7}, \frac{a+2c}{7}, \frac{c-a}{2}\right)$ ба харгалзах хосмог бодлогын боломжит цэг $y^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $y^2 = (\frac{5}{7}, 0, \frac{6}{7})$ бол эдгээр цэгүүд дотор харгалзах бодлогын шийдүүд орших эсэхийг тодорхойл.

$$\begin{aligned}&x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max,\\ &-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq a,\\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \leq b,\\ &2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq c,\\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.20.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	5	8	6	6	6	9	7	11	7	10	8	16	8	11	9
2	5	9	7	7	6	10	8	12	7	11	9	17	8	12	10
3	5	10	8	8	6	12	9	13	7	13	10	18	8	14	11
4	5	12	9	9	6	13	10	14	7	14	11	19	8	15	12
5	5	13	10	10	6	14	11	15	7	16	12	20	8	17	13

4.21.

Дараах бодлогын хосмог бодлогыг график аргаар бодох замаар үндсэн бодлогын шийдийг ол.

$$
\begin{aligned}
&3ax_1 + 11x_2 + 5bx_3 + x_4 \to \min, \\
&-3x_1 + x_2 + (2+b)x_3 - x_4 \geq c, \\
&(2+a)x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 \geq 7, \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 4 :
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.21

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	1	4	6	2	1	1	11	3	1	3	16	4	1	2
2	1	2	1	7	2	2	3	12	3	2	2	17	4	2	4
3	1	3	3	8	2	3	2	13	3	3	4	18	4	3	1
4	1	4	2	9	2	4	4	14	3	4	1	19	4	4	3
5	1	5	4	10	2	5	1	15	3	5	3	20	4	5	2

4.22.

Хосмогийн онол ба график арга ашиглан дараах бодлогын шийдийг ол.

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 - (2+12a)x_3 + (1+6a)x_4 - 3bx_5 \to \max, \\
&x_1 + 3x_2 - x_4 - 2x_5 = 1, \\
&x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\
&x_1 + x_2 - (5+2a-2b)x_3 + (2+a-b)x_4 - (b-2)x_5 \leq -b, \\
&x_1 + x_2 - 14x_3 + 7x_4 + 3x_5 \leq 4, \\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 :
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.22.

	a	b		a	b		a	b		a	b
1	4	3	6	5	3	11	6	3	16	7	3
2	5	4	7	6	4	12	7	4	17	8	4
3	6	5	8	7	5	13	8	5	18	9	5
4	7	6	9	8	6	14	9	6	19	10	6
5	8	7	10	9	7	15	10	7	20	11	7

4.23.

Бодлогын бүх шийдийг ол.

$$\begin{aligned}
&(a-4b)x_1 - 3ax_2 + 8x_3 - 4ax_4 \to \max,\\
&-(b-1)x_1 + (b-3)x_2 + x_3 + (b-4)x_4 \le -1,\\
&(a-4)x_1 - ax_2 + 4x_3 - ax_4 \le -c,\\
&x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.23.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	5	1	6	3	6	1	11	2	6	3	16	1	6	2
2	3	5	2	7	3	6	2	12	1	5	1	17	1	7	1
3	2	5	1	8	3	6	3	13	1	5	2	18	1	7	2
4	2	5	2	9	2	6	1	14	1	5	3	19	1	7	3
5	2	5	3	10	2	6	2	15	1	6	1	20	1	7	4

4.24.

Ээрмэлийн үйлдвэр 2 төрлийн ээрэх утас үйлдвэрлэхэд 3 төрлийн эд болох ноос, капрон, акрилыг ашиглана. 4.24 хүснэгтэнд жилийн турш хэрэглэгдэх түүхий эдийн зарцуулалтын норм, нийт тоо хэмжээ болон 1тн ээрмэл тус бүрээс олох ашиг өгөгдсөн бол нийт ашиг хамгийн их байх үйлдвэрлэлийн оновчтой төлөвлөгөө зохио.

Хүснэгт 4.24а

Түүхий эд	1тн утасанд ноогдох түүхий эд		Түүхий эд-ийн тоо
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть	0,5	0,2	600
Капрон	a	0,6	b
Акрил	$0,5-a$	0,2	c
1тн ээрмэл утаснаас олох ашиг	1100	900	

Хүснэгт 4.24б

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	0,1	620	500	6	0,1	870	510	11	0,2	710	400	16	0,3	690	300
2	0,1	730	500	7	0,1	790	520	12	0,2	880	410	17	0,3	720	300
3	0,1	840	500	8	0,2	920	400	13	0,2	810	410	18	0,3	750	300
4	0,1	650	510	9	0,2	850	400	14	0,2	740	410	19	0,3	780	300
5	0,1	760	510	10	0,2	780	400	15	0,3	660	300	20	0,3	800	300

4.25.

Нефтийн үйлдвэр бензин, керосин ба үйлдвэрийн тос гарган авахын тулд нефть гаргах хоёр төрлийн технологи ашиглана. 4.25 хүснэгтэнд бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ, зардал ба 1тн нефть үйлдвэрлэхэд технологийг ачаалах цаг болон 1тн бүтээгдэхүүний өртөг, улсын захиалгын хоногийн тоо хэмжээ өгөгдөв. Технологийг ачаалах нийт тоо хэмжээ 75маш/цаг.

Бүх хаягдал нь хөдөлмөрийн бүтээмж нь 'с'тн/өдөртэй тэнцүү цэвэрлэх байгууламжаар дамжин өнгөрнө. Үйлдвэрлэлийн бүтээгдэхүүний эрэлт ба нийлүүлэлтийг хязгааргүй гэж үзэж болно. Үйлдвэрийн ашиг хамгийн их байхаар өдрийн оновчтой төлөвлөгөө зохио.

Хүснэгт 4.25а

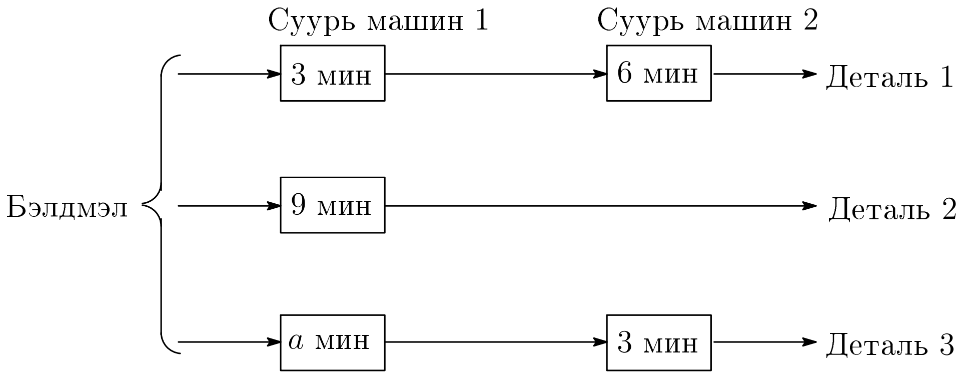
Бүтээгдэхүүн	Бүтээгдэхүүний гарц		Жилийн 1тн бүтээгдэхүүний өртөг	Улсын төлөвлөгөөний өдрийн хэмжээ(тн)
	Технологи 1	Технологи 2		
Бензин	0,6	0,3	100	117
Керосин	0,1	0,3	50	54
Үйлдвэрийн тос	–	0,3	20	
Хаягдал	0,3	0,1		
Үйлдвэрлэлийн зардал	a	b		
Технологийн ачаалал (маш/цаг)	0,2	0,05		

Хүснэгт 4.25б

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	13	37	130	6	21	39	135	11	37	43	140	16	39	45	145
2	15	37	135	7	23	39	140	12	39	45	145	17	31	45	130
3	17	37	140	8	25	39	145	13	37	45	130	18	37	45	135
4	19	37	145	9	29	41	130	14	35	45	135	19	35	45	140
5	21	37	130	10	31	41	135	15	33	45	140	20	33	45	145

4.26.

Цех нь 3 төрлийн деталийг 2 суурь машин дээр бэлдэнэ. 4.26 зурганд деталь тус бүрийг бэлдэхэд шаардагдах хугацааг харуулсан технологийн схем харуулав. Суурь машин тус бүрийн ажиллах цагийн өдрийн тоо хэмжээ 1-р машины хувьд 'b' минут, 2-р машины хувьд 'c' минут болно. 1,2 ба 3-р төрлийн 1 ширхэг деталийн үнэ харгалзан 3;1 ба 2$ тус тус болно.



Хүснэгт 4.26.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	3	600	900	6	5	840	450	11	5	870	900	16	4	870	450
2	3	960	600	7	3	660	900	12	5	930	450	17	5	630	270
3	3	510	750	8	3	960	510	13	3	720	900	18	3	600	750
4	4	690	450	9	4	600	900	14	3	960	420	19	4	720	900
5	5	660	900	10	4	780	450	15	4	660	900	20	4	750	360

4.27.

Гурван төрлийн (A,B ба C) бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэхэд I,II ба III төрлийн түүхий эд ашиглагдана. I ба II төрлийн түүхий эдийн нөөц хязгаарлагдмал. Хүснэгт 4.27а -д түүхий эдийн зарцуулалтын норм, түүхий эд ба бүтээгдэхүүний үнэ, түүхий эдийн нөөц зэргийг харуулав. Үйлдвэр хамгийн их ашигтай байхаар бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэлийн төлөвлөгөө зохио.

Хүснэгт 4.27а

Түүхий эд	1кг түүхий эдийн үнэ($)	Нэгж бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэх түүхий эдийн орц (норм)			Түүхий эдийн нөөц
		A	B	C	
I	2	1	3	a	3000
II	1	4	1	3	–
III	b	6	5	2	3320
	Нэгж бүтээгдэхүүний үнэ	$6b+12$	$5b+22$	c	

Хүснэгт 4.27б

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	1	17	6	3	1	22	11	3	3	26	16	4	2	27
2	2	2	19	7	3	2	23	12	3	4	26	17	4	3	28
3	2	3	21	8	3	2	24	13	4	1	25	18	4	3	30
4	2	4	23	9	3	2	25	14	4	1	27	19	4	4	30
5	3	1	21	10	3	3	25	15	4	2	26	20	4	4	32

4.28.

Үйлдвэр нь 2 төрлийн даавууг 2 төрлийн суурь машин дээр бэлдэнэ. Хүснэгт 4.28-д 1 ба 2 төрлийн даавууг бэлдэх суурь машинуудын хөдөлмөрийн бүтээмж, долоо хоногт даавуу бэлдэх хүчин чадал, 1цагт суурь машиныг үйлчлэх хөдөлмөрийн зардал, даавуу тус бүрийн үнийг харуулав. 7 хоногийн хөдөлмөрийн зардлын нийт нөөц 6000цаг бол ашиг хамгийн их байх 7 хоногийн үйлдвэрлэлийн төлөвлөгөө зохио.

Хүснэгт 4.28а

Суурь машин	Хүчин чадал (мянга.цаг)	Хөдөлмөрийн зардал (мин/цаг)	Хөдөлмөрийн бүтээмж (м/цаг)	
			Даавуу 1	Даавуу 2
1	30	a	20	15
2	b	6	12	6
		Даавууны үнэ ($)	18	c

Хүснэгт 4.28б

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	10	30	26	6	10	40	28	11	9	30	30	16	8	30	28
2	10	30	28	7	10	40	30	12	9	30	32	17	8	30	30
3	10	30	30	8	10	40	32	13	9	40	28	18	8	30	32
4	10	30	32	9	9	30	26	14	9	40	30	19	8	40	28
5	10	40	26	10	9	30	28	15	9	40	32	20	8	40	30

Бодлого

4.16. *ШПБ-г үндсэн, стандарт ба каноник хэлбэрт шилжүүл.*

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,\\
&4x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,\\
&-x_1 + 6x_2 - x_3 \geq 2,\\
&7x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5,\\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

4.17. *ШПБ-г каноник хэлбэрт шилжүүл.*

$$\begin{aligned}
&-x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 \to \max,\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5,\\
&4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6,\\
&-x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = -3,\\
&x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

4.18. *Дараах бодлогуудыг график аргаар бод.*

а)
$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&3x_1 - 2x_2 \leq 6,\\
&-x_1 + 2x_2 \geq 4,\\
&3x_1 + 2x_2 \leq 12,\\
&x_1 \geq 0;
\end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 \to \max\\
&-x_1 + x_2 \leq 2,\\
&x_1 + 2x_2 \leq 7,\\
&4x_1 - 3x_2 \leq 6,\\
&x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;
\end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned}
&7x_1 + 5x_2 \to \min,\\
&x_1 + x_2 \geq 3,\\
&x_1 + 5x_2 \geq 5,\\
&2x_1 + x_2 \geq 4;
\end{aligned}$$

г)
$$\begin{aligned}
&-x_1 + 2x_2 \to \min,\\
&2x_1 - 3x_2 \geq 0,\\
&x_1 - x_2 \leq 3,\\
&2x_1 - x_2 = 4.
\end{aligned}$$

4.19. *Хувьсагчийг зайлуулах замаар график аргаар бод.*

а) $8x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \max,$
$-x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4,$
$7x_1 - 2x_3 \le 16,$
$2x_1 - x_2 - x_3 = 2,$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

б) $x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = -7,$
$x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24,$
$x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 32,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5;$

в) $-x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -5,$
$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2,$
$-2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 6,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0;$

г) $x_1 + x_2 + 2x_3 - 9x_4 \to \max,$
$2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \le 6,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 5,$
$5x_1 + x_2 - 3x_4 = 11,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4;$

4.20. *x^*-цэг нь дараах бодлогуудын шийд болно гэж батал.*

а) $7x_1 - 5x_2 + x_4 \to \max,$
$5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le -5,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 14,$
$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3,$
$x^* = (1, 2, -2, 4);$

б) $-12x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 \to \max,$
$-3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \le 10,$
$-x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \le -3,$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7,$
$x_2 \ge 0, \quad x_4 \ge 0,$
$x^* = (1, 0, -1, 3);$

в) $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max,$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \le 3,$
$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le -1,$
$3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \le 7,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5,$
$x^* = (1, 2, 0, 0);$

г) $x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 \to \max,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 9,$
$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, ,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5;$
$x^* = (3, 2, 0, 0, 4).$

4.21. *Доорх өгөгдсөн цэгүүд дотор харгалзах бодлогын шийд орших уу?*

а) $-2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \le 3,$
$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \le -1,$
$-5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le -3,$
$x^1 = (1, 3, 0, 3),$
$x^2 = (0, -1, 3, 2),$
$x^3 = (5, 0, -6, 0);$

б) $x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 \to \min,$
$-2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \le 1,$
$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le -3,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5,$
$x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$
$x^1 = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$
$x^2 = (1, 0, 0, -2),$
$x^3 = (0, 0, 0, 1);$

в) $-x_1 + x_3 + 7x_4 \to \max,$
$5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 9,$
$-x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 9,$
$-2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le -1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4,$
$x^1 = (1, 1, 0, 1),$
$x^2 = (2, 0, 1, 0),$
$x^3 = \left(\frac{5}{12}, 2, 0, \frac{11}{12}\right);$

г) $-3x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 6x_5 \to \max,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1,$
$x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0,$
$4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 7x_5 = 2,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5,$
$x^1 = (1, 1, 0, 0, 2),$
$x^2 = (1, 0, 2, 1, 1),$
$x^3 = (0, 1, 1, 0, 0).$

4.22. *x^*-цэг нь харгалзах бодлогын шийд байх a параметрийн утгыг ол.*

а) $ax_1 + x_2 \to \max$
$2x_1 + x_2 \le 10,$
$x_1 + 2x_2 \le 14,$
$4x_1 + x_2 \le 16,$
$x^* = (2,\ 6);$

б) $x_1 + 3x_2 \to \max,$
$ax_1 + x_2 \ge 4,$
$2x_1 - x_2 \le 2,$
$3ax_1 + 2x_2 \le 8,$
$x^* = (0,\ 4);$

в) $-x_1 + 7ax_2 + 2ax_3 \to \max,$
$-3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 0,$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$x_2 \ge 0,$
$x^* = (-1, 0, 3);$

г) $4x_1 - x_2 + ax_3 \to \max,$
$5ax_1 - 4x_2 + x_3 \le 1,$
$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3,$
$3ax_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 7,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$
$x^* = (0, 1, 3).$

4.23. *ШПБ-ын шийдүүдийг бүх оройг түүвэрлэх аргаар ол.*

а) $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 4,$
$2x_1 + x_2 + x_3 \le 3,$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6,$
$-x_1 + 2x_2 - x_3 \le -3;$

б) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \min,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4;$

в) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max,$
$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 1,$
$x_1 + x_2 - x_3 = 0,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0;$

г) $x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \to \max,$
$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -4,$
$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \le -3,$
$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \le 4,$
$x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$

4.24. *ШПБ-ын чанар болон геометр байгуулалтын аргыг ашиглаж доорх бодлогуудын шийдийг ол.*

а) $5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1,$
$-x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0;$

б) $7x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max,$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 4,$
$x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 5,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0;$

в) $13x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max,$
$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 6,$
$-3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 2,$
$4x_1 + x_2 - 7x_3 \le -2,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0;$

г) $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \max,$
$-x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 10,$
$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9,$
$4x_1 - x_2 + 5x_3 \le 2,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$

4.25. *Дараах бодлогуудын хосмог бодлогуудыг зохио.*

а) $17x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 - 8x_5 \to \max,$
$3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 + 7x_5 \le 11,$
$x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \ge -8,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 4,$
$x_1 \ge 0, \quad x_4 \ge 0;$

б) $4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min,$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 \ge -5,$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 1,$
$-2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 \le 3;$

в) $3x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min,$
$-x_1 + x_3 - x_4 = 5,$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \le 7,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4;$

г) $4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max,$
$4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge 9,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 6x_5 = 10,$
$-x_1 - 3x_2 + 5x_3 \le 1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.$

4.26. *Хослолын онол болон геометр аргыг ашиглан дараах бодлогуудын шийдийг ол.*

а) $7x_1 + x_3 - 4x_4 \to \max,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 6,$
$2x_1 + x_2 - x_3 \ge -1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.$

б) $x_1 + x_3 + x_5 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \le 6,$
$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \le 5,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.$

в) $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min,$
$-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1,$
$-4x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5.$

г) $6x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \to \max,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \le 0,$
$2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,$
$x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0.$

4.27. *Хосмогийн онол, геометр арга ба хувьсагчийг зайлуулах аргыг ашиглан дараах ШПБ-ын шийдийг ол.*

а) $2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$
$-2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \le -2,$
$x_1 - x_2 + x_3 \le 1,$
$3x_1 + x_2 + x_4 = 5,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; x_4 \ge 0;$

б) $-x_1 + 3x_2 + 31x_3 + 25x_4 - 4x_5 \to \max,$
$x_1 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 2,$
$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1,$
$x_1 + x_2 + 10x_3 + 8x_4 + x_5 \le 5,$
$2x_1 - x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 5x_5 \le 0.$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_5 \ge 0;$

в) $3x_1 - 2x_2 - x_3 \to \max,$
$3x_2 + x_3 \ge -2,$
$x_1 + x_2 \le 3,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 \le -1,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

г) $4x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 2x_4 \to \max,$
$-3x_2 - 4x_3 - x_4 + 2x_5 \le 1,$
$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 3x_5 = -4,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -1,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0.$

4.28. *Дараах бодлогуудын бүх шийдийг ол. (Мөн орой байх чанарыг ялга.)*

а) $$\begin{aligned}&10x_1+17x_2+29x_3\to\min,\\&-2x_1+5x_2+5x_3-x_4=1,\\&5x_1+5x_2+10x_3-x_4=2,\\&x_j\ge 0,\quad j=1,...,4.\end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned}&2x_1-4x_2-4x_3+2x_4-x_5\to\min,\\&2x_1-x_2+x_3+3x_5\le -2,\\&-7x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5\le -7,\\&5x_1+3x_2+6x_3-2x_4+2x_5=5,\\&x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_4\ge 0;\end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned}&x_1+3x_2-4x_3-x_4\to\min,\\&4x_1+x_2-3x_3-3x_4=-2,\\&-3x_1+2x_2-x_3+x_4\ge -1,\\&x_j\ge 0,\quad j=1,...,4.\end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned}&10x_1+2x_2+6x_3+5x_4\to\min,\\&2x_1+2x_2+2x_3-x_4\le 1,\\&5x_1+x_2+3x_3+x_4\ge 2,\\&x_j\ge 0,\quad j=1,...,4.\end{aligned}$$

5 Шугаман программчлалын бодлого бодох Симплекс арга

5.1 Товч ойлголт ухагдахуун

Шугаман программчлалын бодлогыг бодох үндсэн арга нь симплекс арга юм.
Симплекс аргыг ШПБ-ыг дараах каноник хэлбэртэй бодлогод хэрэглэнэ.

$$< C,x >\to\max,\quad Ax=b,\quad x\geq 0 \tag{5.1}$$

Үүнд $A\in A(m,n), b\in R^m, c\in R^n$. A -матрицын ранг нь m-тэй тэнцүү гэж үзье. (6.1) бодлогын боломжит шийдийн олонлогийг X -ээр тэмдэглэе:

$$X=\{x\in R^n\mid Ax=b, x\geq 0$$

Тэгвэл теорем 4.* ёсоор $x\in X$ цэг нь X олонлогийг оройн (өнцгийн) цэг байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $a^j(j\in J(x))$ байх явдал юм. Өөрөөр хэлбэл, x цэгийн эерэг координатуудад харгалзах A матрицын баганууд нь шугаман хамааралгүй байна гэсэн үг юм. Хэрэв x орой нь үл бөхөөгүй бол $|J(x)|=m$ болох ба бөхсөн бол $|J(x)|<m$ байна. $x\in X$ цэгийн эерэг координатад харгалзах A матрицын баганууд болон A матрицын дурын шугаман хамааралгүй m баганыг агуулсан системийг x оройн суурь гэж нэрлэнэ. Өөрөөр хэлбэл, $\{a^j\mid j\in J\},\ J\subset\{1,...,n\}$ систем векторууд R^m огторгуйд суурь үүсгэх ба $J(x)\subset J$ бол энэ нь x оройн суурь болно.
Өгөгдсөн суурь $a^j\mid j\in J$ -д харгалзах $x_j(j\in J)$ хувьсагчуудыг суурь хувьсагчууд гэнэ. Үл бөхөх орой x -т цорын ганц суурь $\{a^j\mid j\in J(x)\}$ харгалзана. Бөхсөн оройд хэд хэдэн суурь харгалзаж болох боловч $rang(A)=m$ нөхцөл нь дор хаяж нэг суурь орших баталгаа өгнө.
Симплекс арга нь $x^0,x^1,...,x^k$ зэрэг оройн (өнцгийн) цэгүүдийн дарааллыг тэдгээрт харгалзах суурийг хамт байгуулдаг тооцон бодох алгоритм юм. Ээлжит k-р итерац дээр дараах 2 нөхцлийг аль нэгийг шалгана:

1. x^k нь (6.1) бодлогын шийд

2. (6.1) бодлого нь шийдгүй гэдгийг тогтооно, эсвэл дараагийн x^{k+1} цэгийг байгуулна. Хэрэв x^k орой үл бөхөх бол
$$< c, x^{k+1} > > < c, x^k > \tag{5.2}$$
нөхцөл биелэгдэнэ.

Хэрэв x^k орой бөхсөн бол (6.2) нөхцөл эсвэл $x^{k+1} = x^k$ гэсэн циклдэх нөхцөл биелэгдэнэ. Суурийудын тоо төгсгөлөг учраас итерацийг цикл дэх нөхцлөөс үргэлжлүүлэн гүйцэтгэвэл тодорхой үйлдлийн дараа (6.2) нөхцөл биелнэ. Дээрх үйлдэл нь төгсгөлөг тооны итерацийн дараа бодлогын шийд өгөх эсвэл шийдгүй гэдгийг тогтооно.

5.2 Симплекс аргын алгоритм

k-р итерацд харгалзах орой x^k ба түүний суурь $\{a^j \mid j \in J_k\}$ -өгөгдсөн болог.
$x = x^k,\ J = J_k$ гэж тэмдэглэе.
A матрицан багануудыг суурiар илэрхийлье.
$$a^k = \sum_{j \in J} a^j \lambda_{jk}, \quad k = 1, ..., n, \tag{5.3}$$
Үүнд $\lambda_{jk}(j \in J)$ задаргааны коеффициентүүд.
Δ_k -үнэлгээг бодъёо:
$$\Delta_k = \sum_{j \in J} c_j \lambda_{jk} - c_k, \quad k = 1, ..., n \tag{5.4}$$
Дурын $k \in J$ үед
$$\lambda_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв } j = k \\ 0, & \text{хэрэв } j \in J \mid \{k\} \end{cases} \tag{5.5}$$
ба $\Delta_k = 0$ биелнэ.
$\lambda_{jk},\ \Delta_k\ (j \in J,\ k \notin J)$ параметрын тэмдгүүдээс хамааран доорх нөхцлүүдийн аль нэг нь үргэлж биелнэ.

(A) Дурын $k \notin J$ үед $\Delta_k \geq 0$.

(B) $\exists s \notin J: \quad \Delta_s < 0$ ба $\lambda_{js} \leq 0, \forall j \in J$

(C) $\exists s \notin J,\ \exists j \in J: \quad \Delta_s < 0$ ба $\lambda_{js} > 0,$

Теорем 6.1 (Оновчтой байх нөхцөл) Хэрэв A нөхцөл биелэгдвэл x-нь (6.1) бодлогын шийд болно. Хосмог бодлогын шийд y-г
$$< y, a^j >= c_j, \quad j \in J$$
нөхцлөөс олно.

Теорем 6.2 (Шийд үл оршин байх) Хэрэв (B) нөхцөл биелэгдвэл (6.1) бодлого шийдгүй.

Одоо (C) нөхцөл биелэгдэж байна гэж үзье. s номер тодорхойлно.

$$\alpha = \min_{j \in J, \lambda_{js} > 0} \frac{x_j}{\lambda_{js}} \tag{5.6}$$

$$\alpha = \frac{x_r}{\lambda_{rs}}, \quad r \in J, \quad \lambda_{rs} > 0 \tag{5.7}$$

J' индексийн дугаар тодорхойлно:

$$J' = (J \mid \{r\}) \cup \{s\} \tag{5.8}$$

$x' \in R^n$ цэгийг байгуулна:

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \alpha\lambda_{js}, & \text{хэрэв } j \in J \mid \{r\}, \\ \alpha, & \text{хэрэв } j = s, \\ 0, & \text{хэрэв } j \notin J'. \end{cases} \tag{5.9}$$

Теорем 6.3 (Шинэ орой шилжих) x' цэг нь $\{a^j \mid j \in J'\}$ суурьтай X олонлогийн оройн цэг болох ба

$$< c, x' > = < c, x > -\alpha\Delta_s \tag{5.10}$$

Симплекс аргын итерацийн үйлдлийг $x^{k+1} = x'$, $J_{k+1} = J'$ гэж үзээд дахин үргэлжлүүлнэ. Энэ үед a^r багана сууриас гарч, a^s багана суурьт орно. λ_{rs}-элементийг чиглүүлэгч элемент гэж нэрлэнэ. Хэрэв $\alpha = 0$ бол $x' = x$ болж циклдэх тохиолдол гарах тул үүнээс зайлсхийхийн тулд дараах дүрмийг хэрэглэнэ.

Теорем 6.4 (Циклээс гарах Блэндийн дүрэм) (C) нөхцөл биелэгдэж байгаа үед s ба r-г $\quad s = \min\{k \notin J \mid \Delta_k < 0\}, \quad r = \{j \in J \mid \lambda_{js} > 0, \ \frac{x_j}{\lambda_{js}} = \alpha\}$ гэж авбал циклдэх процесс боломжгүй болно.

A матрицын багануудыг $x' = x^{k+1}$ оройн $\{a^j \mid j \in J_{k+1} = J'\}$ сууриар задална:

$$a^k = \textstyle\sum_{j \in J} a^j \lambda'_{jk} = \sum_{j \in J \mid \{r\}} a^j \lambda'_{jk} + a^s \lambda'_{sk}, \quad k = 1, ..., n$$

Шинэ үнэлгээг бодвол:

$$\Delta'_k = \textstyle\sum_{j \in J'} c_j \lambda'_{jk} - c_k, k = 1, ..., n.$$

(λ_{jk}, Δ_k) ба $(\lambda'_{jk}, \Delta'_k)$ параметрүүдийн холбоо дараах томъёогоор илэрхийлэгдэнэ.

$$\lambda'_{jk} = \begin{cases} \lambda_{jk} - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}}\lambda_{rk}, & \text{хэрэв } j \in J \mid \{r\}, \\ \frac{\lambda_{rk}}{\lambda_{rs}}, & \text{хэрэв } j = s. \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\Delta'_k = \Delta_k - \frac{\Delta_s}{\lambda_{rs}}\lambda_{rk} \tag{5.12}$$

5.3 Симплекс хүснэгт

Симплекс аргын итерацийг гүйцэтгэхдээ хялбарчлан симплекс хүснэгтийг ашиглана. Үүний тулд x орой ба түүний суурь $\{a^j \mid j \in J\}$ -г доорх $(m+1) \times (n+1)$ хүснэгтэд байрлуулна.

Хүснэгт 6.1

	a^1	$\dots$	a^k	$\dots$	a^s	$\dots$	a^n	b
a^1								
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a^j	λ_{j1}	$\dots$	λ_{jk}	$\dots$	λ_{js}	$\dots$	λ_{jn}	x_j
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a^r	λ_{r1}	$\dots$	λ_{rk}	$\dots$	λ_{rs}	$\dots$	λ_{rn}	x_r
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
Δ	Δ_1	$\dots$	Δ_k	$\dots$	Δ_s	$\dots$	Δ_n	<c,x>

$\lambda_{jk},\ x_j,\ \Delta_{jk}(j \in J, k = 1, ..., n),\ < c, x >$ параметрүүдийг хүснэгт 6.1-т байрлуулсны дараа шинжилгээ хийнэ. Хэрэв (A) ба (B) нөхцлүүд биелэгдвэл итерацийг зогсооно. Хэрэв (C) нөхцөл биелэгдвэл $\{a^j \mid j \in J'\}$ суурьтай x' цэгт харгалзах хүснэгт 6.2-г байгуулна.

Хүснэгт 6.2

	a^1	$\dots$	a^k	$\dots$	a^s	$\dots$	a^n	b'
a^1								
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a^j	λ_{j1}	$\dots$	λ_{jk}	$\dots$	λ_{js}	$\dots$	λ_{jn}	x'_j
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$a^s \to a^s$	λ'_{s1}	$\dots$	λ'_{sk}	$\dots$	1	$\dots$	λ'_{sn}	x'_s
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
Δ	Δ'_1	$\dots$	Δ'_k	$\dots$	Δ'_s	$\dots$	Δ'_n	<c,x'>

b баганад b баганыг $\{a^j \mid j \in J\}$ суурьаар задалсан задаргааны коэффициентүүдийг байрлуулав. Өөрөөр хэлбэл,

$$b = Ax = \sum_{j \in J} a^j x_j.$$

хүснэгт 6.1(T) -ээс ШПБ-ыг симплекс аргын дараагийн хүснэгт 6.2(T)-г гаргахдаа дараах дүрмийг мөрдөнө.

1. T' хүснэгтийн a^j мөрийг $j \in J \mid \{r\}$ үед гаргаж авахдаа a^r мөрийг $\frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}}$ -ээр үржүүлж, T хүснэгтийн a^j -мөрнөөс хасна.

2. T' хүснэгтийн a^s мөрийг гаргах авахда T хүснэгтийн a^r мөрийг $\lambda_r s$ элементэд хуваана.

3. T' хүснэгтийн Δ мөрийг гаргаж авахдаа T хүснэгтийн a^r мөрийг $\frac{\Delta_s}{\lambda_{rs}}$-ээр үржүүлж Δ мөрнөөс хасна. Үүний дараа T' хүснэгтийн хувьд харгалзах шинжилгээг гүйцэтгэнэ. Хэрэв (C) нөхцөл биелэгдвэл дараагийн симплекс хүснэгтэнд шилжинэ.

4. Анхны оройн цэгийг байгуулах.

   Симплекс аргыг бид тайлбарлахдаа анхны оройн цэг $x^o \in X$ ба түүний суурийг мэдэгдэж байна гэж үзсэн.

   Зарим тохиолдолд анхны оройн цэгийг шууд олж болно. Жишээлбэл,

$$< c, x > \to \max,$$
$$Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

   Үүнд $A \in A(m,n), \quad b \in R^m, \quad c \in R^n, \quad b \geq 0$

   Симплекс аргыг хэрэглэхийн тулд эхлээд энэ бодлогыг каноник хэлбэрт шилжүүлнэ.

$$< c, x > \to \max, Ax + u = b, \quad x \geq 0, \quad u \geq 0 \tag{5.13}$$

   (6.13) бодлогын боломжит шийдийн олонлогийг Z-ээр тэмдэглэвэл:

$$Z = \{z = (x,u) \in R^n_+ \times R^m_+ \mid \textstyle\sum_{j=1}^n a^j x_j + \sum_{i=1}^m e^i u_i = b\},$$

   Үүнд e^i-нь R^m огторгуйн i-р орт $(i = 1, ..., m)$. $Z = (0, b)$ цэг нь Z олонлогийн оройн цэг бөгөөд харгалзах суурь нь $\{e^1, ..., e^m\}$ болно. Иймд Z цэгээс эхлэн симплекс аргын итерацийг хэрэгжүүлнэ.

   Одоо анхны оройн цэг байгуулах ерөнхий арга болох зохиомол суурийн аргатай танилцъя. (6.1) бодлогын хувьд $b \geq 0$ гэж үзье. Дараах туслах чанарын бодлого авч үзье.

$$\sum_{i=1}^m U_i \to \min, \tag{5.14}$$

$$Ax + u = b, x \geq 0, u \geq 0$$

   (6.13) ба (6.14) бодлогын боломжит шийдийн олонлогууд давхцана. (6.14) бодлогын хувьд $Z = (0, b)$ оройн цэгээс эхлэн симплекс аргыг хэрэглэнэ. Тэгвэл

   (a) (6.14) бодлогын $Z^o = (x^o, u^o)$ гэсэн шийд нь Z олонлогийн оройн цэг байх.

   (b) Z^o цэгийн суурь $\{a^j \mid j \in J\} \cup \{e^i \mid i \in I\}$ байна.
   $|J| + |I| = m$

   (c) A матрицын багануудыг сууриар задална:

$$a^k = \sum_{j \in J} a^j \lambda_{jk} + \sum_{i \in I} e^i \mu_{ik}, \quad k = 1, ..., n \tag{5.15}$$

   Дараах тохиолдлуудын аль нэг нь биелнэ.

   A) $u^0 \neq 0$. Энэ үед $X = \emptyset$ байна.

B) $u^0 = 0$. Энэ үед дараах тохиолдлыг авч үзнэ.

$b1$. $I = \emptyset$. Тэгвэл $\{a^j \mid j \in J\}$ нь x^o цэгийн суурь болно. (6.15) томъёо (6.13)-тэй давхцана. (6.1) бодлогын x^o гэсэн анхны оройн цэгээс эхлэн симплекс аргаар бодно.

$b2$. $I \neq \emptyset$ ба $\mu_{rs} \neq 0, r \in I, s \notin J$ болог. Тэгвэл $\{a^j \mid j \in J'\} \cup \{e^i \mid i \in I'\}$ нь мөн $Z^o = (x^o, 0)$ цэгийн суурь болно. Үүнд $J' = J \cup \{S\}, I' = I \backslash \{r\}$. A матрицын багануудыг энэ сууриар задлах задаргааны коэффициентүүдийг (6.11)-тэй төсөөтэйгээр задална. Хэрэв шинээр үүссэн суурийн хувьд дахин $b2$) нөхцөл дахин биелбэл итерацийг цаашид үргэлжлүүлэн гүйцэтгэж төгсгөлөг алхмын дараа $b1$) эсвэл $b3$) тохиолдолруу шилжинэ.

$b3$. $I \neq \emptyset$ ба $\mu_{ik} = 0, \ \forall i \in I, \ k = 1, ..., n$ байг. (6.15) томъёо дараах хэлбэртэй болно.

$$a^k = \sum_{j \in J} a^j \lambda_{jk}, \quad k = 1, ..., n \tag{5.16}$$

$\{a^j \mid j \in J\}$ систем нь R^m -ийн суурь болж чадахгүй. Учир нь $|J| < m$. $\bar{I} = \{1, 2, ..., m\} \backslash I$. $\bar{A}$ матриц нь $a_i (i \in \bar{I})$ мөрүүдтэй ба $\bar{a}^j$ нь $\bar{A}$ матрицын j-р багана $(j = 1, ..., n)$, $\bar{b}$ вектор нь $b_i (i \in \bar{I})$ координаттай.

Дараах нөхцөл биелэгдэнэ.

1) ранг$(\bar{A}) = |\bar{I}|$

2) $Ax = b$ систем нь $\bar{A}x = \bar{b}$ системтэй тэнцүү чанартай ба (6.1) бодлогонд $< a_i, x >= b_i, \ i \in I$ зааглал илүү бөгөөд үүнийг орхиж болно.

3) $\{\bar{a}^j \mid j \in J\}$ нь $x^o \in X$ цэгийн суурь болно.
Үүнд $X = \{x \in R^n \mid \bar{A}x = \bar{b}, x \geq 0\}$.

(6.16) тэнцэтгэлийн зөвхөн $i \in \bar{I}$ координатуудыг авч үзвэл $\bar{A}$ матрицан багануудыг энэ суурь дахь задаргаа гарна. Иймд зохиомол суурийн арга нь (6.1) ШПБ -г бодох төдийгүй $Ax = b$ системээс шугаман хамааралтай илүү тэгшитгэлүүдийг зайлуулж тэнцүү чанартай ШПБ -руу шилжүүлж байна.

6 Тээврийн бодлого

6.1 Бодлогын тавил

$a_i \geq 0, \ i = 1, ..., m$ нөөц бүхий m нийлүүлэгч A_i байгууллагаас $b_j \geq 0, \ j = 1, ..., n$ эрэлт бүхий n хэрэглэгч байгууллага B_j-д нэгэн төрлийн бүтээгдэхүүн тээвэрлэх шаардлагатай. i-р цэгээс j-р цэгт хүргэх нэгж ачааны тээвэрлэлтийн үнэ c_{ij} бол нийт зардлыг хамгийн бага байлгах бодлого нь тээврийн бодлого юм.

Математик загвар(тээврийн тавил)

$Z = \sum c_{ij} x_{ij} \to \min$

Зааглал: $\sum x_{ij} = a_i, \ i = 1, ..., m$

$\sum x_{ij} = b_j, \ j = 1, ..., n$
$x_{ij} \geq 0, \ \forall i, j.$

- $X = (x_{ij})$ нь mxn хэмжээст матриц бөгөөд элементүүд нь A_i-ээс B_j-рүү тээвэрлэх бүтээгдэхүүний тоо хэмжээнээс тогтоно. Хэрэв X-нь бодлогын зааглалыг хангаж байгаа бол үүнийг боломжит шийд (тээврийн төлөвлөгөө) гэж нэрлэнэ.

- Тээврийн бодлого шийдтэй байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь:
$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$
эрэлт нийлүүлэлт тэнцүү байх явдал юм.

- Эрэмблэгдсэн олонлог $\{(i_k, j_k)\}_{k=1}^{2l}$ -ийн хувьд
$i_{k+1} = i_k, \ k = 1, 3, ..., 2l - 1$ үед
$j_{k+1} = j_k, \ k = 2, 4, ..., 2l - 2, \ j_{2l} = j_1$ үед
нөхцөл биелэгдэж байвал үүнийг цикл гэж нэрлэнэ.

- Хэрэв $J_+(X) = \{(i, j) \mid x_{ij} > 0\}$ индексийн олонлогийг нэмж гаргаж авсан олонлог $J_s(X)$ нь циклийг агуулаагүй бөгөөд $m+n-1$ элементээс тогтсон бол боломжит шийд X нь суурь шийд болно.

Тээврийн бодлогын алгоритм. X гэсэн суурь шийднээс эхэлнэ.

1. $u_i + v_j = c_{ij}, \ \forall(i, j) \in J_s(X)$ байхаар $u_i, \ i = 1, ..., m$ ба $v_j, \ j = 1, ..., n$ тоонуудыг олно. Хэрэв $w_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0, \ i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., n$ бол X нь оновчтой шийд.

2. $w_{pq} < 0$ байхаар (p,q)-г олно. $i_1, j_1 := (p, q)$-ээс эхлэн $J_s(X) \cup \{(p, q)\}$ олонлогийн Z циклийг олно.

3. Шинэ боломжит цэг X-ийг дараах дүрмээр тодорхойлно.
$x_{ij} := x_{ij} + (-1)^{k+1} x_{rs}, \ (i, j) \in Z$
$x_{rs} := \min\{x_{i_k j_k} \mid (i_k, j_k) \in Z, \ k = 2, 4, ..., 2l\}$
Индексийн олонлог
$J_s(x) := J_s(x) \cup \{(p, q)\} \mid \{(r, s)\}$
дээр тодорхойлогдсон X шийд нь суурь шийд болно. 1-р алхам руу шилжих.

Тээврийн алгоритмын хүснэгтэн хэлбэр
Тээврийн бодлогын алгоритмыг доорх хүснэгтэнд $x_{ij} \in X, \ (i, j) \in J_s(X), \ w_{ij}, \ (i, j) \notin J_s(X)$ хувьсагчуудыг байрлуулах замаар илэрхийлж болно. Хүснэгтэнд ороогүй үлдсэн хувьсагчид болох $x_{ij}, \ (i, j) \notin J_s(X)$ ба $w_{ij}, \ (i, j) \in J_s(X)$-уудын утгуудыг тэг гэж үзнэ. Циклийг дараах жишээнд тэгш өнцөгтөөр харуулав.

Хүснэгт

$u_i, \ v_j, \ w_{ij}$ утгуудыг олохдоо $u_1 = 0$ гэж үзэн дараах нүднүүдийг ашиглана.
$v_2 = c_{12}(w_{12} = 0$ учир$)$, $v_q = c_{1q}(w_{1q} = 0$ учир$)$, $u_2 = c_{2q} - v_q(w_{2q} = 0$ учир$)$, $v_m = c_{2m} - u_2(w_{2m} =$

0 учир), $u_p = ..,\ v_1 = ..,\ u_m = ...$ гэх мэт.
Жишээлбэл, дээрх хүснэгтэнд $w_{pq} < 0$ ба $x_{p2} \leq x_{1q}$ $(x_{rs} = x_{p2})$ байг. Дараах хүснэгтэнд доорх аргаар бодно.

Хүснэгт

Хүснэгтийн утгуудыг олно:
$\bar{x}_{p2} = 0,\ \bar{x}_{pq} = x_{p2},\ \bar{x}_{12} = x_{12} + x_{p2},\ \bar{x}_{1q} = x_{1q} - x_{p2}.$
$\bar{u}_1,\ \bar{v}_j,\ \bar{w}_{ij}$-г олохдоо дээрхтэй ижил зарчмаар $\bar{u}_1 = 0$ гэж үзээд олно.

Анхны суурь шийд олох дүрэм

Зүүн дээд өнцгийн арга

Зүүн дээд өнцөгт хамгийн их боломжит бүтээгдэхүүний тоог байрлуулна. Эрэлт ба нийлүүлэлт нь тэнцсэн хоосон болсон нэг нийлүүлэгч эсвэл нэг хэрэглэгч байгууллагыг зайлуулж үйлдлийг давтана. Зөвхөн хамгийн сүүлийн алхамд хэрэглэгч ба нийлүүлэгч хоёуланг хүснэгтээс зайлуулна.

Хамгийн бага өртгийн арга

Хамгийн их боломжит бүтээгдэхүүнийхэмжээг хамгийн бага өртөгтэй нүдэнд байрлуулна. Эрэлт ба нийлүүлэлт нь тэнцсэн хоосон болсон нүдтэй нэг нийлүүлэгч буюу хэрэглэгчийг зайлуулна. Сүүлийн алхам дээр нийлүүлэгч ба хэрэглэгч хоёуланг зайлуулна.

Фагелийн арга

Мөр буюу багана тус бүрийн хувьд хамгийн их үнэ ба хамгийн бага үнийн ялгаврыг олно. Хамгийн их ялгавар харгалзаж буй мөр буюу багана хамгийн бага зардалтай нүдэнд бүтээгдэхүүний хамгийн их хэмжээг байрлуулна. Эрэлт ба нийлүүлэлт нь тэнцсэн хоосон нүдтэй нийлүүлэгч эсвэл хэрэглэгчийг зайлуулна. Ялгаврыг дахин шинэчлэн бодох замаар үйлдлийг давтана. Зөвхөн сүүлийн алхам дээр нийлүүлэгч ба хэрэглэгч хоёуланг зайлуулна.

Тээврийн бодлого

Дараах бодлогуудыг потенциал аргаар бод.

6.1.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Хэрэгцээ	30	30	10	20	90

6.2.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	280
A_3	3	8	1	2	160
Хэрэгцээ	130	220	60	70	

6.3.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	2	3	4	3	90
A_2	5	3	1	2	30
A_3	2	1	4	2	40
Хэрэгцээ	70	30	20	40	

6.4.

	B_1	B_2	Нөөц
A_1	1	2	40
A_2	3	2	30
A_3	1	4	30
Хэрэгцээ	30	70	100

6.5.

	B_1	B_2	B_3	Нөөц
A_1	1	2	4	90
A_2	1	3	4	30
A_3	2	2	3	40
Хэрэгцээ	50	60	10	120

6.6.

	B_1	B_2	Нөөц
A_1	1	2	10
A_2	3	4	20
Хэрэгцээ	25	15	

6.7.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	1	3	2	6	20
A_2	2	5	3	5	30
A_3	4	2	4	1	40
Хэрэгцээ	15	25	20	30	

6.8.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	Нөөц
A_1	4	5	2	4	3	1	60
A_2	3	1	3	5	2	6	80
A_3	2	7	6	1	6	3	60
Хэрэгцээ	20	20	35	25	40	60	

6.9.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	2	4	5	3	7	100
A_2	3	3	1	4	2	200
A_3	1	4	3	6	4	300
Хэрэгцээ	100	50	110	190	150	

6.10.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	3	1	5	4	80
A_2	1	3	5	6	100
A_3	2	1	3	6	50
A_4	9	3	8	1	60
Хэрэгцээ	100	40	90	70	

6.11.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	3	1	5	4	80
A_2	2	4	6	7	110
A_3	4	3	5	8	50
A_4	9	3	8	1	60
Хэрэгцээ	100	40	90	70	

6.12.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	5	1	3	4	100
A_2	3	6	1	2	120
A_3	1	4	7	3	80
A_4	2	3	2	4	200
Хэрэгцээ	130	60	95	215	

6.13.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	2	1	4	3	90
A_2	5	7	6	5	30
A_3	4	3	2	3	40
Хэрэгцээ	60	30	20	40	

6.14.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	1	4	2	1	40
A_2	2	5	4	3	30
A_3	3	1	3	2	20
Хэрэгцээ	20	30	40	10	

6.15.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	2	3	1	3	80
A_2	3	4	1	5	110
A_3	4	1	2	1	95
Хэрэгцээ	50	60	90	70	

6.16.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	4	2	1	1	100
A_2	5	4	3	2	50
A_3	1	3	2	3	150
Хэрэгцээ	80	60	100	70	

6.17.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	2	1	3	5	4	40
A_2	1	2	7	3	6	30
A_3	5	3	2	4	1	10
A_4	3	6	1	4	5	20
Хэрэгцээ	15	20	10	35	20	

6.18.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Нөөц
A_1	1	3	2	3	12
A_2	4	5	3	4	7
A_3	2	7	1	2	23
A_4	1	6	2	4	8
Хэрэгцээ	10	15	18	7	

6.19.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	3	1	2	4	3	50
A_2	5	1	3	2	6	90
A_3	2	3	4	1	1	65
A_4	6	2	5	3	2	75
Хэрэгцээ	100	30	70	30	50	

6.20.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	1	3	5	6	8	10
A_2	3	4	3	7	3	20
A_3	5	2	1	8	2	15
A_4	1	3	2	5	4	15
Хэрэгцээ	10	10	20	12	8	

6.21.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	3	5	6	4	3	50
A_2	3	4	3	5	4	40
A_3	6	4	2	7	9	100
A_4	7	6	2	6	7	100
Хэрэгцээ	50	40	100	70	30	

6.22.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	2	4	1	3	5	100
A_2	7	3	9	4	1	290
A_3	10	15	14	8	4	250
A_4	9	13	12	11	7	150
Хэрэгцээ	150	250	200	100	90	

6.23.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	16	30	17	10	16	40
A_2	30	27	26	9	23	60
A_3	13	4	22	3	1	100
A_4	3	1	5	4	24	100
Хэрэгцээ	70	70	70	70	20	

6.24.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	15	1	22	19	1	200
A_2	21	18	11	4	3	200
A_3	26	29	23	26	24	200
A_4	21	10	3	19	27	200
Хэрэгцээ	190	190	190	190	40	

6.25.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	30	2	5	6	15	160
A_2	5	29	9	5	7	150
A_3	16	24	14	6	26	140
A_4	13	28	4	25	8	150
Хэрэгцээ	60	60	130	120	150	

6.26.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Нөөц
A_1	25	28	20	25	7	160
A_2	27	5	11	23	10	120
A_3	1	25	14	16	16	140
A_4	8	6	4	16	18	180
Хэрэгцээ	15	20	10	35	20	

7 Градиентийн аргууд

Дараах нөхцөлт биш экстремумын бодлого авч үзье.

$$f(x) \to \min, \ x \in R^n, \tag{7.1}$$

Үүнд $f : R^n \to R$ нь тасралтгүй тухайн уламжлалуудтай функц. $f'(x)$ - функцийн градиент

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \dots , \ \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \tag{7.2}$$

(7.1) бодлогын орчим минимуман цэг x^*-г олох зорилго тавъяа. $f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$.

7.1 Градиентийн аргын алгоритм

Алхам 1. $x^k, \ \varepsilon > 0, \ \alpha_0$ өгөгдсөн. $k = 0$

Алхам 2. $f'(x^k)$-г бодно.

Алхам 3. Хэрэв $\|f'(x^k)\| < \varepsilon$ бол итерацийг зогсоож, $x^* = x^k$ гэж үзнэ.

Алхам 4. Алхам $\alpha = \alpha_0$-г өгнө.

Алхам 5. $x^k(\alpha) = x^k - \alpha f'(x^k)$ цэг байгуулна.

Алхам 6. Хэрэв $f(x^k(\alpha)) < f(x^k)$ (эсвэл $f(x^{k+1}) - f(x^k) < -\varepsilon \|f'(x^k)\|^2$) бол $\alpha_k = \alpha$ ба $x^{k+1} = x^k(\alpha_k), \ k := k + 1$ гэж үзээд "алхам 2"-руу шилжих

Алхам 7. $\alpha := \frac{\alpha}{2}$ гэж үзээд "алхам 5"-руу шилжих

Теорем 7.1 $f : R^n \to R$ функц R^n дээр доороосоо зааглагдсан ба градиент нь Ли... нөхцлийг хангадаг болог. Өөрөөр хэлбэл,

$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\|, \ \forall x, y \in R^n, \ L > 0.$

Тэгвэл дурын анхны дөхөлтийн цэг $x^o \in R^n$-ээс эхэлж градиентийн аргаар байгуулсан x^k дарааллын хувьд

$\lim_{k\to\infty} \|f'(x^k)\|$ биелэгдэнэ.

Теорем 7.2 Хэрэв "Теорем 7.1"-ын нөхцөл дээр нэмэлт $f(x)$ функц гүдгэр бол градиентийн аргаар байгуулсан x^k дараалал нь (7.1) бодлогын багасгагч дараалал болно. Өөрөөр хэлбэл,

$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \min_{x\in R^n} f(x)$

Санамж. Хэрэв градиентийн аргын алгоритмын Алхам 6 -дээр α_k-г

$f(x^k(\alpha_k) = \min_{0<\alpha<} f(x^k(\alpha)))$

нөхцлөөс сонговол энэ алгортм эрс бууралтын аргын алгоритм болно.

7.2 Флетчер - Ривегийн аргын алгоритм

$\{x^k\}$ дарааллыг дараах дүрмээр байгуулна.

$$d^o = -f'(x^o) \tag{7.3}$$

$$\beta_{k-1} = \frac{\|f'(x^k)\|^2}{\|f'(x^{k-1})\|^2} \tag{7.4}$$

$$d^k = -f'(x^k) + \beta_{k-1} d^{k-1} \tag{7.5}$$

$$f(x^k + \alpha_k d^k) = \min_{\alpha>0} f(x^k + \alpha d^k) \tag{7.6}$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k \tag{7.7}$$

Дээрх итерацийг зогсоох нөхцөл нь:

$\|f'(x^k)\| \leq \delta$ ($\delta > 0$ өгөгдсөн нарийвчлал)

Бодлогууд.

Градиентийн (эрс бууралтын арга) болон Флетчер Ривсийн аргаар дараах бодлогуудыг өгөгдсөн анхны дөхөлтийн цэг x^o-ээс эхэлж бод.

7.1. $f(x) = x_1^3 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4 \to \min, \quad x^o = (0, 0)$

7.2. $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to \min, \quad x^o = (0, 0)$

7.3. $f(x) = [(x_2 + 1)^2 + x_1^2][x_1^2 + (x_2 - 1)^2] \to \min, \quad x^o = (0, 0)$

7.4. $f(x) = (x_2^2 + x_1^2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2 \to \min, \quad x^o = (0, 1)$

7.5. $f(x) = -x_1^2 \exp[1 - x_1^2 - 20.75(x_1 - x_2)^2] \to \min, \quad x^o = (0.1, 0.5)$

7.6. $f(x) = -x_1 x_2 \exp[-(x_1 + x_2)] \to \min, \quad x^o = (0, 1)$

7.7. $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min, \quad x^o = (8, 9)$

7.8. $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \to \min, \quad x^o = (0, 0)$

7.9. $f(x) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \to \min, \quad x^o = (0.5, 1)$

Квадратлаг функцийн хувьд эрс бууралтын аргыг хялбар байдлаар хэрэгжүүлж болно.

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x > \tag{7.8}$$

Үүнд A-нь $(n \times n)$ хэмжээст тэгш хэмтэй эерэг тодорхойлогдсон матриц, $b,\ x \in R^n$.
$f'(x) = Ax - b$ тул
$\alpha_k = \frac{<Ax^k - b,\ Ax^k - b>}{<A(Ax^k - b),\ Ax^k - b>}$
Дараах бодлогуудыг эрс бууралтын аргаар өгөгдсөн цэгээс эхлэн өгөгдсөн нарийвчлалтайгар бод.
$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x > \to \min, \quad x \in R^n.$

7.10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^o = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/5 \\ 1/10 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0.01$

7.11. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x^o = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0.001$

7.12. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0.001$

7.3 Нөхцөлт экстремумын бодлогын тоон аргууд

Шугаман биш программчлалын дараах бодлого авч үзье.

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \subset R^n \tag{7.9}$$

$X = \{x \mid g_j(x) \le 0,\ j = 1, ..., m\},$
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$
$f,\ g_j,\ j = 1, ..., m$ функцүүд 2 дахин тасралтгүй диффренциалчлагдана.

7.3.1 Торгуулийн функцийн арга

Энэ аргын гол санаа нь (7.8) бодлогыг бодохдоо торгуулийн функцийн тусламжтайгаар дараалсан нөхцөлт биш экстремумын бодлого бодох явдал юм. Туслах функцийг дараах хэлбэрээр зохионо.

$F(x,\ r^k) = f(x) + P(x,\ r^k)$
Үүнд $P(x,\ r^k)$ торгуулийн функц, $r^k \geq 0$ -торгуулийн параметр. Торгуулийн функц доорх хэлбэртэй байж болно.

- $P(x,\ r^k) = -r^k \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)}$

- $P(x,\ r^k) = -r^k \cdot \sum_{j=1}^{n} \ln[-g_j(x)]$

Алхам 1. $x^k \in X,\ r^k > 0,\ C > 1,\ \varepsilon > 0,\ k = 0$ өгөгдөнө.

Алхам 2. Туслах чанарын функц $F(x,\ r^k)$-г зохионо. $F(x, r^k) = f(x) - r^k \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)}$ (эсвэл $F(x, r^k) = f(x) - r^k \cdot \sum_{j=1}^{m} \ln[-g_j(x)]$)

Алхам 3. $F(x, r^k) \to \min, \quad x \in R^n$ бодлого бодож $x^*(r^*)$ шинжийг олно. $F(x^*(r^*), r^k) = \min_{x \in R^n} F(x, r^k)$

Алхам 4. $P(x^*(r^*))$ утгыг олно.

Алхам 5. Хэрэв $|P(x^*(r^*), r^k)| \leq \varepsilon$ бол итерацийг зогсооно. $x^* = x^*(r^k)$ шийд болно.

Алхам 6. Эсрэг тохиолдолд $r^{k+1} = \frac{r^k}{C},\ x^{k+1} = x^*(r^k),\ k := k+1$ "Алхам 2"-руу шилжинэ.

Теорем 7.3 $f(x),\ g_j(x),\ j = 1, ..., m$ функцүүд гүдгэр бөгөөд төгсгөлөг болог. (7.8) бодлогын шинжүүдийн олонлог X^* зааглагдсан ба хоосон биш, түүнчлэн $g_j(x^o) < 0,\ j = 1, ..., m$ байх $x^o \in X$ цэг оршино. Тэгвэл торгуулийн функцийн аргаар байгуулсан $\{x(r^k)\}_{k=0}^{\infty}$ дарааллын бүх хязгаарын цэгүүд нь X^*-д харъяалагдана. Өөрөөр хэлбэл, $\lim_{i \to \infty} x(r^{k_i}) = \bar{x},\ \ \bar{x} \in X^*$

Торгуулийн функцийн аргыг математик программчлалын ерөнхий бодлогод хэрэглэж болно.

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \subset R^n \tag{7.10}$$

$X = \{x \mid g_j(x) = 0,\ j = 1, ..., m;\ g_j(x) \leq 0,\ j = m+1, ..., p;\ m < n\}$
Туслах чанарын функц $F(x, r^k)$-г дараах хэлбэртэй зохионо.
$F(x, r^k) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} g_j^2(x) - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \frac{1}{g_j(x)}$
эсвэл
$F(x, r^k) = f(x) + \frac{1}{2r^k} \sum_{j=1}^{m} g_j^2(x) - r^k \sum_{j=m+1}^{p} \ln[-g_j(x)]$

Дараах бодлогуудыг өгөгдсөн анхны цэгээс эхлэн торгуулийн функцийн аргаар бод.

7.13. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,$

$-5x_1 + 4x_2 \leq 0,$
$x_1 - 2x_2 \leq 0,$
$-x_1 - 4x_2 + 3 \leq 0,$
$x^o = (2/5; 3/5).$

7.14. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \to \min,$
$x_1 - 2x_2 - 2 \leq 0,$
$-2x_1 + x_2 \leq 0,$
$-x_1 - 4x_2 + 4 \leq 0,\ x^o = (2/5; 9/10)$

7.15. $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - \frac{3}{4}x_2 \to \min,$
$-x_1 - x_2 + 1 \leq 0,$
$x_1 - 2x_2 \leq 0,$
$-2x_1 + x_2 \leq 0,$
$x^o = (1/4; 7/12)$

7.16. $x_1^2 + 2x_2^2 \to \min,$
$-x_1 - x_2 + \frac{3}{2} \leq 0,$
$x_1 - 2x_2 + 1 \leq 0,$
$-2x_1 + x_2 \leq 0,$
$x^o = (7/12; 3/4)$

Дараах бодлогуудыг өгөгдсөн анхны цэгээс эхлэн торгуулийн функцийн аргаар бод.

7.17. $x_1 - 2x_2^2 + 4x_2 \to \max,$
$-3x_1 - 2x_2 = 6$

7.18. $-4x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 3 \to \max,$
$-x_1 - x_2 = 2$

7.19. $\frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 \to \min,$
$x_1 - 1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

7.20. $\frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1 + x_2 \to \min,$
$x_1 + x_2 \leq 6,$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

7.21. $4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5 \to \min,$
$2x_1 - x_2 = 6$

7.22. $-8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7 \to \max,$
$2x_1 + 3x_2 = -6$

7.23. $(x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,$
$2x_1 - x_2 \leq 2$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

7.24. $\ln x_1 - x_2 \to \min,$
$1 - x_1 \leq 0,$
$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$

7.3.2 Боломжит чиглэлийн арга

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \subset R^n \tag{7.11}$$

$X = \{x \mid g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, ..., m\}$
$\{x^k\}$ дарааллыг дараах дүрмээр байгуулна.

$$x^{k+1} = x^k + t_k h^k, \quad k = 0, 1, ..., \tag{7.12}$$

$$x^k \in X, \quad J_k = \{j \mid -\varepsilon_k < g_j(x^k) \leq 0\} \tag{7.13}$$

$t_k \leq 0$ нь доорх бодлогын шийд:

$$f(x^k + t_k h^k) \to \min, \tag{7.14}$$

$$g_j(x^k + t_k h^k) \leq 0, \quad j = 1, ..., m \tag{7.15}$$

$$t_k = \min\{t_k^*, t_k^{**}\}, \quad t_k^* \geq 0, \ t_k^{**} \geq 0 \tag{7.16}$$

$t_k^*, \ t_k^{**}$ нь дараах нөхцлийг хангана:

$$f(x^k + t_k^* h^k) = \min\nolimits_{t_k \geq 0} f(x^k + t_k h^k)$$
$$t_k^{**} = \min\{t_k^j\}, \quad g_j(x^k + t_k h^k) = 0, \quad t_k \geq 0$$

h^k вектор нь шугаман программчлалын бодлогын шийд болно.

$$z \to \min \tag{7.17}$$

$< f'(x^k), h^k > \leq \ Z,$
$< g_j'(x^k), h^k > \leq \ Z, \ j \in J_k$
$\|h_i^k\| \leq 1, \ i = 1, ..., n$ *Боломжит чиглэлийн аргаар дараах бодлогуудыг ол.*

7.25. $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \to \min,$
$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_1 + x_2 \geq 4$

7.26. $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min,$
$x_1 + x_2 \leq 3, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_1 + 2x_2 \leq 4$

7.27. $-x_1 - x_2 \to \min,$
$x_1^2 + x_2^2 \leq 25$

7.28. $2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 \to \min,$
$-x_1 + 2x_2 - 1 \leq 0$
$-x_1 - x_2 + 1 \leq 0$

7.29. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \to \min,$
$2x_1 - x_2 + 1 \leq 0, \quad -2x_1 - x_2 + 2 \leq 0$

7.30. $x_1^2+3x_2^2-x_1+2x_2 \to \min,$
$x_1-4x_2 \le 0, \quad -2x_1+x_2+1 \le 0$

7.31. $x_1^2+2x_2^2-4x_1 \to \min,$
$x_1^2-x_2 \le 0, \quad -x_1-5x_2+4 \le 0$

Дасгал

7.1.

Дараах бодлогын хувьд x^o цэг нь аль нөхцлийг хангахыг шалга. Үүнд: A. x^o шийд болно. B. Бодлого шийдгүй. C. x^o цэгийг бодвол их утга олгодог орой оршино.

а)

$$\begin{aligned}
&-2x_1+5x_2-7x_3+ax_4+3x_5 \to \max,\\
&3x_1+x_2+2x_3+bx_4+4x_5=15,\\
&-x_1+cx_2-x_3+2x_4-x_5=-4,\\
&x_j \ge 0, \quad j=1,...,5;\\
&\qquad x^0=(1,0,0,0,3):
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.28а

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	-1	1	6	1	-7	2	11	2	-5	-2	16	3	-1	-1
2	0	-7	1	7	2	-1	-1	12	-1	-6	-3	17	-2	-8	1
3	2	-1	1	8	1	2	1	13	1	-5	2	18	-1	-6	3
4	1	-1	-1	9	5	-6	1	14	6	-7	3	19	3	-5	-2
5	1	-5	-2	10	3	-1	1	15	2	-5	2	20	7	-6	2

б)

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3-3x_4+x_5 \to \max,\\
&x_1+ax_2+x_3-3x_4+4x_5=3,\\
&x_1-bx_2-x_3+cx_4=1,\\
&x_j \ge 0, \quad j=1,...,5;\\
&\qquad x^0=(2,0,1,0,0):
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.28б

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	-1	5	2	6	0	2	3	11	2	1	-3	16	-2	1	2
2	0	1	2	7	-2	-1	1	12	-3	-2	1	17	2	3	1
3	-1	0	-3	8	-6	2	3	13	0	2	-3	18	-1	3	-5
4	6	1	-2	9	2	-1	3	14	-1	2	1	19	2	1	5
5	4	2	3	10	-4	1	-4	15	-5	3	-3	20	3	-4	1

в)

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,\\
&2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 7x_4 + 9x^5 = b,\\
&x_1 - x_2 + x_4 + cx_5 = 2,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5;\\
&\qquad\qquad x^0 = (0, 0, (b-14)/a, 2, 0):
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.28в.

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	-1	5	2	6	-7	12	6	11	-2	8	2	16	-6	8	2
2	-6	12	3	7	-6	10	3	12	-8	12	3	17	4	19	1
3	2	18	3	8	2	15	2	13	-3	10	6	18	-1	12	3
4	-4	10	5	9	3	19	1	14	-7	8	2	19	-2	5	2
5	-3	8	4	10	1	19	3	15	3	15	4	20	5	16	2

7.2.

$x^* = (1, 2, 0, 1, 0)$ цэг нь дараах бодлогын шийд байх k параметрийн бүх утгыг ол.

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + ax_2 + kx_3 - 5x_4 - 2kx_5 \to \max,\\
&-x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0,\\
&3x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 5,\\
&bx_1 + cx_2 + x_3 + x_5 = b + 2c,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5:
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.29

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	12	-1	-3	6	3	0	-1	11	8	-1	-3	16	10	1	1
2	7	1	1	7	17	2	3	12	7	-2	-5	17	1	-2	-5
3	15	2	3	8	8	1	1	13	9	1	1	18	9	0	-1
4	5	0	-1	9	0	-1	-3	14	15	-3	-7	19	19	2	3
5	3	-2	-5	10	21	2	3	15	-1	0	-1	20	-5	-1	-3

7.3.

Дараах бодлогуудыг өгөгдсөн оройн цэгээс эхлэн симплекс аргаар бод.

$$
\begin{aligned}
&ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,\\
&2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,\\
&x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5;\\
&\qquad\qquad x^0 = (0, 0, (b-7c)/5, c, 0):
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.30а

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	8	1	6	3	32	4	11	4	15	2	16	5	22	3
2	1	9	1	7	2	33	4	12	2	16	2	17	1	23	3
3	5	10	1	8	1	34	4	13	3	17	2	18	4	24	3
4	4	11	1	9	5	35	4	14	5	18	2	19	3	25	3
5	3	12	1	10	4	36	4	15	1	19	2	20	2	26	3

$$
\begin{aligned}
&x_1 + ax_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 \to \max, \\
&-x_1 + x_2 + x_3 + (b-6)x_4 + (c+1)x_5 + x_6 = 3, \\
&2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2(b+3)x_4 + (2c+1)x_5 + 5x_6 = 6, \\
&3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3(b+2)x_4 + (2c+1)x_5 + 6x_6 = 6, \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 6;
\end{aligned}
$$

$x^0 = (0, 0, 3, 0, 0, 0)$, эхний суурь: $\{a^1, a^2, a^3\}$

Хүснэгт 4.30б

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	-1	4	5	6	-5	4	1	11	-2	3	2	16	-4	4	4
2	-3	3	4	7	-4	3	2	12	-3	4	3	17	-3	3	3
3	-4	2	3	8	-1	2	3	13	-4	5	4	18	-2	2	2
4	-5	1	2	9	-2	1	4	14	-1	2	5	19	-1	1	1
5	-2	5	1	10	-3	5	5	15	-5	1	1	20	-6	5	5

$$
\begin{aligned}
&ax_1 + x_3 + x_5 + 6x_6 \to \max, \\
&2x_1 + x_2 + x_3 + (b+1)x_4 + (c-3)x_5 - 2x_6 = 1, \\
&3x_1 + 3x_2 + x_3 + bx_4 + (c-12)x_5 - 11x_6 = 3, \\
&-x_1 + 2x_2 - x_3 - (b+3)x_4 - (c+11)x_5 - 12x_6 = 2, \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 6;
\end{aligned}
$$

$x^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, a^1, a^2, a^3-анхны суурь болно.

Хүснэгт 4.30в

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	-4	2	2	6	-4	3	3	11	-7	6	4	16	-6	4	2
2	-6	3	2	7	-7	5	3	12	-5	3	2	17	-7	2	2
3	-3	2	1	8	-8	6	2	13	-6	5	5	18	-5	4	3
4	-7	4	2	9	-5	4	1	14	-4	3	1	19	-8	5	1
5	-9	3	1	10	-8	7	5	15	-9	6	3	20	-7	3	1

7.4.

Дараах бодлогыг каноник хэлбэрт шилжүүлж симплекс аргаар бод.

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 - x_3 + ax_4 \to \max, \\
&-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2, \\
&bx_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 12, \\
&2x_1 + cx_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6, \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 4,
\end{aligned}
$$

Хүснэгт 4.31

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	3	-1	6	5	2	3	11	2	1	2	16	3	3	1
2	3	1	1	7	4	3	6	12	3	3	4	17	4	1	2
3	4	2	-1	8	6	1	5	13	5	2	-1	18	3	1	0
4	7	2	3	9	2	2	2	14	7	1	5	19	4	1	3
5	8	3	4	10	5	3	7	15	6	3	8	20	5	2	6

7.5.

Дараах системээр өгөгдсөн полиэдрийн оройг зохиомол суурийн аргаар ол.

$$\begin{aligned}
&x_1 + ax_2 - 2x_3 - x_4 = b,\\
&x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = c,\\
&\quad - 4x_2 + x_3 + x_4 = 8,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 4:
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.32

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	1	2	6	7	1	3	11	5	1	4	16	3	1	5
2	3	2	3	7	8	2	4	12	6	2	5	17	4	2	6
3	4	3	4	8	2	3	5	13	7	3	6	18	5	3	7
4	5	4	5	9	3	4	6	14	8	4	7	19	6	4	8
5	6	5	6	10	4	5	7	15	2	5	8	20	7	5	9

7.6.

Эхлээд анхны оройг зохиомол суурийн аргаар олж, симплекс аргаар бод.

$$\begin{aligned}
&\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 \to \max,\\
&-2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = a,\\
&2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - \tfrac{b}{b+1}x_5 = 1,\\
&-x_1 + x_2 - x_3 + \tfrac{c}{c+1}x_4 + x_5 = 8,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5:
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.33

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	1	2	6	6	2	2	11	2	2	3	16	3	2	4
2	2	1	2	7	7	2	2	12	4	2	3	17	6	2	4
3	3	1	2	8	2	1	3	13	6	2	3	18	3	3	4
4	4	1	2	9	4	1	3	14	3	1	4	19	6	3	4
5	5	2	2	10	6	1	3	15	6	1	4	20	3	4	4

7.7.

Дараах бодлогын хосмог бодлогыг $y^o = (0,1,1,2,0)$ оройноос эхлэн симплекс аргаар бодох замаар үндсэн бодлогын шийдийг ол.

$$\begin{aligned}
&5x_1 + 6x_2 + 13x_3 \to \min,\\
&5x_1 + (5-a)x_2 + (12-a)x_3 \geq 2,\\
&-x_1 + x_2 \leq 2,\\
&x_2 + x_3 \geq 3,\\
&2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 1,\\
&bx_1 - (b+c)x_2 - cx_3 \leq -15
\end{aligned}$$

Хүснэгт 4.34

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	1	4	6	1	1	3	11	9	1	2	16	1	5	1
2	3	1	4	7	3	2	3	12	7	2	2	17	1	4	1
3	5	1	4	8	5	2	3	13	5	3	2	18	1	3	1
4	7	1	4	9	7	1	3	14	3	4	2	19	1	2	1
5	9	1	4	10	9	2	3	15	1	1	2	20	1	1	1

7.8.

Дараах полиэдрийн $x^o = (0,1,0,1,0,0)$ оройн бүх суурийг ол.

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 + 4x_6 = 4,\\
&-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = -1,\\
&x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 0,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1,...,6.
\end{aligned}$$

7.9.

Дараах полиэдрийн $x^o = (0,0,1,0,0)$ оройн бүх суурийг k параметрээс хамааруулж ол.

$$\begin{aligned}
&kx_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 3,\\
&-x_2 + x_3 + (k-5)x_4 + 2x_5 = 1,\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 1,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5.
\end{aligned}$$

Бодлогууд

7.32. *Дараах бодлогуудад x^o орой аль нөхцлийг хангахыг симплекс аргаар тогтоо. Үүнд: A. x^o шийд болно. B. Бодлого шийдгүй. C. x^o цэгийг бодвол их утга олгодог орой оршино.*

а)
$$\begin{aligned}
&2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max,\\
&-5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 14x_5 = -7,\\
&x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 4x_4 + 20x_5 = -10,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5;\\
&\qquad x^0 = (2,0,0,3,0);
\end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned}
&-x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max,\\
&5x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -1,\\
&-4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 5,\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5;\\
&\qquad x^0 = (0,1,0,0,1).
\end{aligned}$$

в) $3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$
$-2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1,$
$10x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 3,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5;$
$x^0 = (0, 1, 0, 0, 1).$

г) $x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 \to \min,$
$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1,$
$2x_1 - 2x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5;$
$x^0 = (2, 1, 0, 0, 0).$

7.33. *Симплекс аргын онолыг ашиглан x^* цэг харгалзах бодлогын шийд байх k параметрийн бүх утгыг ол.*

а) $x_1 + k^2x_2 - 2x_3 + 2kx_4 + 5x_5 - 10x_6 \to \max,$
$-2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2,$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$-2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 6;$
$x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0).$

б) $x_1 + 3kx_2 + 2x_3 + 15x_4 - k^2x_5 + 5x_6 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 4,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 6;$
$x^* = (0, 3, 0, 0, 1, 1).$

в) $-3x_1 + kx_2 + 2x_3 + x_4 - 2kx_5 + 5x_6 \to \max,$
$5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 4,$
$2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4,$
$-7x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_6 = -5,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 6;$
$x^* = (0, 0, 1, 2, 0, 1).$

7.34. *Дараах бодлогуудыг өгөгдсөн x^o оройгоос эхлэн симплекс аргаар бод.*

а) $5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 5,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 4;$
$x^0 = (0, 0, 1, 5);$

б) $x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 3,$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 4;$
$x^0 = (0, 0, 1, 3).$

в) $3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 \to \max,$
$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 3,$
$4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 - 7x_6 = -2,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 6;$
$x^0 = (0, 0, 1, 0, 1, 0).$

г) $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 \to \min,$
$-x_1 + x_3 - 2x_4 = -2,$
$x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0,$
$2x_1 + x_2 + 5x_4 + x_5 = 7,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5;$
$x^0 = (3, 1, 1, 0, 0).$

д) $3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 \to \max,$
$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2,$
$-4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = -4,$
$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 5;$
$x^0 = (1, 0, 0, 0, 0).$

е) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 \to \max,$
$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 1,$
$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 6;$
$x^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0).$

7.35. *Дараах бодлогуудыг каноник хэлбэрт шилжүүлж симплекс аргаар бод.*

а) $-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \le 3,$
$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \le 1,$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5;$

б) $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \max,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 1,$
$2x_1 - x_2 + x_3 \le 3,$
$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 2,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.$

в) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min,$
$2x_1 - x_2 + x_4 \le 3,$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 1,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1,$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \le 1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4;$

7.36. *1.Зохиомол суурийн аргаар дараах полиэдр олонлогуудыг хоосон биш эсэхийг шалга. 2.Полиэдр хоосон биш бол түүний орой x^o-г олж, шугаман хамааралтай тэгшитгэлүүдийг зайлуулан x^o оройн суурийг тодорхойл.*

а) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1,$
$x_1 - x_3 + 2 = 1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4;$

б) $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4,$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5,$
$3x_1 + 7x_3 + 2x_4 = 13,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.$

в) $-x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3,$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.$

г) $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5,$
$-4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 9,$
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 12,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5.$

д) $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3,$
$-2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + x_2 + x_4 = 2,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.$

е) $3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6,$
$x_2 + x_3 - 2x_4 = 3,$
$x_1 + 2x_3 + x_4 = 1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 4.$

7.37. *Зохиомол суурийн аргыг ашиглан доорх бодлогуудыг бод.*

а) $-2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \max,$
$-2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4,$
$-x_1 + x_2 - x_5 = 4,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5.$

б) $5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 + 2x_6 \to \max,$
$2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 1,$
$-3x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 2,$
$-5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_6 = 3,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 6.$

в) $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \max,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3,$
$x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 1,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5.$

г) $2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 \to \min,$
$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 30,$
$5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 19,$
$x_1 + x_2 + 3x_4 = 3,$
$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., 5.$

7.38. *Дараах бодлогуудын хосмог бодлогонд симплекс аргыг хэрэглэж үндсэн бодлогын шийдийг ол.*

а) $$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,\\ &2x_1 - x_2 + x_3 \le 1,\\ &-x_1 + x_2 - x_3 \le 1,\\ &x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le -6,\\ &x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2,\\ &2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 12, \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} &19x_1 + x_2 + 16x_3 \to \max,\\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 \le -2,\\ &3x_1 - 5x_2 + 7x_3 \le -10,\\ &4x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3,\\ &x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3,\\ &3x_1 + 2x_3 \le -1; \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} &4x_1 + 6x_2 - 3x_3 \to \max,\\ &-3x_1 - x_2 + x_3 \ge 2,\\ &-2x_1 - 4x_2 + x_3 \ge 5,\\ &-2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1,\\ &-x_1 - x_2 + x_3 \ge 3,\\ &2x_2 + x_3 \le 2. \end{aligned}$$

7.39. *Дараах системээр өгөгдсөн полиэдрт багтсан хамгийн их радиустай бөмбөрцгийн радиусыг ол.*

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \quad x_1 + x_2 - x_3 \le 1,\\ &x_1 - x_2 - x_3 \le 1, \quad -x_1 + x_2 + x_3 \le 1,\\ &x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \quad -x_1 + x_2 - x_3 \le 0. \end{aligned}$$